



Metasuperficies transparentes con control total del salto de fase

Manuel Alejandro Londoño Cadavid

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2016

Metasuperficies transparente con control total del salto de fase

Manuel Alejandro Londoño Cadavid

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias Físicas-Perfil de investigación

Director:
Doctor Juan Domingo Baena Doello

Línea de Investigación:
Electromagnetismo Aplicado
Grupo de Investigación:
Grupo de Física Aplicada

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2016

Dedicatoria

A mi familia,
mi pareja,
mi universidad.

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Juan Domingo Baena Doello, por todo el tiempo dedicado a mi formación y enseñanza académica y profesional. A todos los conocimientos y herramientas adquiridas, y a su guía en este reto emprendido en los últimos dos años. A mis padres por su incondicional apoyo y dedicación a mi enseñanza y formación, tanto profesional como social. A mi pareja por su amor y apoyo en los momentos mas difíciles y los mas alegres en los últimos 3 años de relación. A mi universidad, porque le debo todo lo que soy como profesional, porque me ha dado todas las herramientas y oportunidades para ser un gran profesional, y pronto un gran magíster. A todo el profesorado, por haber influido directa o indirectamente en mi enseñanza. A todas las secretarias, por su diligencia y afán de servicio. A mis compañeros, porque sin ellos, las tardes en el laboratorio serían mas grises.

Muchas gracias a todos.

Resumen

En la presente tesis de maestría, se modela y diseña una metasuperficie transparente con control total del salto de fase en el rango de 0 a 6 GHz. Se estudia el comportamiento en frecuencia de los coeficientes de transmisión mediante simulación numérica para el caso ideal de una estructura hecha por conductor perfecto libre en el vacío, de cobre libre en el vacío y cobre impreso sobre un sustrato dieléctrico de baja permitividad ARLON AD250. Se exploran dos posibles aplicaciones de dicha metasuperficie, la refracción anómala de un haz a 3 GHz y el control del estado de polarización de la onda transmitida. Por último, se cierra el presente trabajo con unas conclusiones y explorando el posible trabajo a futuro.

Palabras Clave: transparencia, metasuperficie, refracción anómala, polarización, polarizabilidades, transmisión, anillos resonadores, control total sobre la fase.

Abstract

In the present work, we design a full phase control transparent metasurface in the microwaves band. We study the behavior of the transmission coefficient in frequency for a broad range from 0 to 6 GHz in several cases in which the unit cell is composed of free-standing PEC, free-standing copper and a PCB made of copper on a low loss dielectric substrate ARLON AD250. We research two possible applications: anomalous refraction at 3GHz of a normal impinging beam, and full control over the transmitted-wave polarization state. Finally, we finish with a chapter of conclusions and further work.

Keywords: transparent, metasurface, anomalous refraction, polarization, polarizabilities, transmission, rings resonators, full-phase control.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de tablas	XV
Lista de símbolos	XVI
1 Introducción	1
2 Teoría y modelo de circuito	3
2.1 Hoja de corrientes superficiales \mathbf{J}_S y \mathbf{K}_S	5
2.2 Condición de transparencia	8
2.2.1 Corriente eléctrica superficial	9
2.2.2 Corriente magnética superficial	10
2.3 Modelo de circuito para un arreglo de resonadores en el vacío	11
2.4 Modelo de circuito para dos sub-arreglos de resonadores acoplados	14
2.4.1 Modos normales	17
3 Resultados	21
4 Aplicaciones	31
4.1 Refracción anómala	31
4.2 Control del estado de polarización	36
5 Conclusiones	42
Bibliografía	44

Lista de Figuras

2.1.	Esquema de una hoja de corriente eléctrica superficial \mathbf{J}_S . Una onda linealmente polarizada \mathbf{E}_1^+ incide normalmente a la hoja, y es dispersada en una onda reflejada \mathbf{E}_1^- y una transmitida \mathbf{E}_2^+	3
2.2.	Esquema del coeficiente de transmisión en el plano complejo para una hoja de corriente eléctrica superficial (línea sólida) y una metasuperficie transparente con control total del salto de fase del campo transmitido (línea discontinua).	4
2.3.	Esquema de una hoja de corrientes superficiales \mathbf{J}_S y \mathbf{K}_S . Una onda linealmente polarizada \mathbf{E}_1^+ incide normalmente a la hoja, y es dispersada en una onda reflejada \mathbf{E}_1^- y una transmitida \mathbf{E}_2^+	6
2.4.	Esquema comparativo entre la polarizabilidad requerida (a) y una resonancia de tipo lorentziana (b). Ambas relaciones son circunferencias en el plano complejo, en el caso de la polarizabilidad, la circunferencia se recorre en un cambio en la fase de 0 a 2π , mientras que en el caso de la resonancia de tipo Lorentziana, la circunferencia es recorrida en un cambio en la frecuencia de 0 a ∞	11
2.5.	Esquema del resonador constituyente de la celda unidad el cual está basado en un resonador tipo SRR [37]. En esencia, la respuesta eléctrica del resonador se debe al gap generado en la sección c_1 , mientras que la respuesta magnética en el resonador se debe a la circulación de corriente eléctrica por la cinta de metal en la sección c_2	12
2.6.	Esquema de una celda unidad donde se muestran dos resonadores idénticos salvo una inversión especular en su plano de simetría $\hat{y} - \hat{x}$. Bajo la acción de un campo electromagnético incidente, la respuesta de los anillos se deberá al capacitor en el gap C , la inductancia del anillo L , y por último, el acople magnético entre los dos resonadores M	14

- 2.7. Esquema de los acoples entre los sub-arreglos de anillos: (a) Acoples auto-inducidos entre los anillos pertenecientes al sub-arreglo # 1, (b) acoples entre los resonadores del sub-arreglo #1 con el #2, (c) acoples entre los resonadores del sub-arreglo #2 con el #1, y (d) acoples auto-inducidos entre los anillos pertenecientes al sub-arreglo # 2. 16
- 2.8. Esquema de los dos modos normales de oscilación de la corriente en los resonadores de la metasuperficie. Podemos darnos cuenta que el modo par está asociado a una respuesta magnética de la estructura, como se puede apreciar en el dipolo total de la celda unidad. Contrariamente, el modo impar, está asociado a una respuesta eléctrica de la estructura debido a que el dipolo magnético neto en la celda unidad es nulo 17
- 3.1. (a) Vista en perspectiva de la celda unidad, (b) vista lateral y (c) vista superior. Los parámetros de simulación usados son: $a = 10$ mm, $b = 0.5$ mm, $r = 4$ mm, $w = 0.5$ mm, $g = 0.5$ mm y $l = 7$ mm (por efectos de visibilidad, las dimensiones no se muestran a escala). 22
- 3.2. Resultados de la simulación de la celda unidad mostrada en la Figura 3.1: (a) módulo de la transmisión, (b) fase y (c) gráfica en coordenadas polares. El pico máximo de transmisión sucede cuando $s = 5.6$ mm. La frecuencia de resonancia de la metasuperficie es $f = 3.45$ GHz y la magnitud de la transmisión obtenida a esta frecuencia es $|t| = 0.99$ 23
- 3.3. Resultados de la simulación para las polarizabilidades de la metasuperficie con una celda unidad hecha de conductor perfecto: (a) parte real y (b) parte imaginaria. La curva negra representa la polarizabilidad magnética $\hat{\alpha}_m$ y la roja la eléctrica $\hat{\alpha}_e$ 24
- 3.4. a) Vista en perspectiva de la celda unidad, (b) vista lateral y (c) vista superior. Los parámetros de simulación óptimos son: $a = 10$ mm, $b = 0.5$ mm, $r = 4$ mm, $w = 0.5$ mm, $g = 0.5$ mm, $l = 7$ mm y $s = 5.6$ mm (por efectos de visibilidad, las dimensiones de los anillos no están a escala). 25
- 3.5. Resultados de simulación para la celda unidad descrita en la Figura 3.4: (a) módulo del coeficiente de transmisión, (b) fase y (c) diagrama polar en el plano complejo. La curva negra representa el caso ideal con conductor perfecto y la roja el caso de anillos hechos con cobre. El valor de la magnitud del coeficiente de transmisión a la frecuencia de resonancia de la estructura es $|t| = 0.91$ a la frecuencia de resonancia $f = 3.45$ GHz. 26

- 3.6. a) Vista en perspectiva de la celda unidad, (b) vista lateral y (c) vista superior. Los parámetros de simulación usados son: $a = 10\text{mm}$, $b = 0.5\text{mm}$ (mismo que el espesor del sustrato ARLON AN250), $r = 4\text{ mm}$, $w = 0.5\text{ mm}$, $g = 0.5\text{ mm}$ y $s = 5.6\text{ mm}$. Se hace un barrido del parámetro l con el fin de obtener el valor de máxima transmisión a la frecuencia de resonancia. 27
- 3.7. Resultados de simulación para la celda unidad descrita en 3.6: (a) módulo del coeficiente de transmisión, (b) fase y (c) diagrama polar en el plano complejo. La curva negra representa el caso ideal hecho por conductor perfecto, la azul representa el caso de cobre y dieléctrico conservando los parámetros geométricos de la Figura 3.1, y la curva roja representa el caso de una celda de cobre y dieléctrico re-ajustando el valor de l de 7 mm a 6.6 mm . La magnitud de la transmisión obtenida es $|t| = 0.88$ a la frecuencia de resonancia $f = 2.82\text{ GHz}$. 28
- 3.8. Resultados de simulación para la celda unidad descrita en la Figura 3.6 bajo incidencia oblicua: (a) módulo del coeficiente de transmisión y (b) fase. La curva negra representa $\theta = 0^\circ$, la roja $\theta = 15^\circ$, la cyan $\theta = 30^\circ$, la magenta $\theta = 45^\circ$ y la verde $\theta = 60^\circ$ 29
- 4.1. Esquema de la estructura simulada con una macro-celda unidad compuesta por 12 celdas unidad como la mostrada en la Figura 3.6 con diferentes parámetros l y s como se describe en la Tabla 4.1. 32
- 4.2. Resultados de simulación de las 12 celdas unidad: (a) magnitud de la transmisión y (b) fase. La línea negra sólida representa el corte a 3GHz para el cual se obtienen aproximadamente saltos de fase multiples de 30° 33
- 4.3. Resultados de simulación para el monitor de campo eléctrico a la frecuencia $f = 3\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico incidente: (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/3$, (c) $\phi = 2\pi/3$, (d) $\phi = \pi$, (e) $\phi = 4\pi/3$, (f) $\phi = 5\pi/3$. El ángulo obtenido para la onda refractada es de $\theta = 56.4^\circ$. La amplitud del campo eléctrico es representada por la escala de colores, con una máxima amplitud obtenida de $|E| = 569\text{V/m}$ 35
- 4.4. Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico en la región incidente a un plano y frecuencia de referencia arbitrarios. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/3$, (c) $\phi = 2\pi/3$, (d) $\phi = \pi$, (e) $\phi = 4\pi/3$, (f) $\phi = 5\pi/3$ 38
- 4.5. Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico para un plano de referencia arbitrario en la región de transmisión y a la frecuencia $f_{PLC} = 2.83\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/3$, (c) $\phi = 2\pi/3$, (d) $\phi = \pi$, (e) $\phi = 4\pi/3$, (f) $\phi = 5\pi/3$ 39

-
- 4.6. Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico en la región de transmisión a la frecuencia $f_{PCI} = 2.73\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$ 40
- 4.7. Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico en la región de transmisión a la frecuencia $f_{PCD} = 2.92\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$ 41

Lista de Tablas

- 3.1. Valores de la magnitud del coeficiente de transmisión a la frecuencia de resonancia de $f = 2.82$ GHz para los resultados mostrados en la Figura 3.7. . . . 29
- 4.1. Valores obtenidos de la magnitud y la fase de la transmisión a 3GHz para las 12 celdas unidad de la metasuperficie. La primera celda unidad se representa por una celda de vacío con transmisión modulo de transmisión igual a 1 y un desfase nulo del campo en el plano de referencia de la metasuperficie. . . . 33

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
C	Capacitancia	F	Q/V
Z	Impedancia	Ohm	$ \mathbf{E} / \mathbf{H} $
\mathbf{J}	Densidad de corriente eléctrica	A	$j\omega p/A$
\mathbf{K}	Densidad de corriente magnética	V/m	$j\omega m/A$
\mathbf{p}	Dipolo eléctrico	A m s	$\int_V \mathbf{J} d^3x$
\mathbf{m}	Dipolo magnético	A m	$\int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J} d^3x$
j	Unidad imaginaria	1	$-\sqrt{-1}$
L	Inductancia	H	$-\frac{d\Phi_m^{ind}}{dt}$
\mathbf{E}	Campo eléctrico	V/m	$\bar{\bar{\alpha}}_e \cdot \mathbf{p}$
\mathbf{H}	Intensidad de campo magnético	A	$\bar{\bar{\alpha}}_m \cdot \mathbf{m}$
t	Coeficiente de transmisión	1	E^t/E^{inc}
\mathbf{k}	Vector de onda	1/m	$2\pi/\lambda$
I	Corriente eléctrica	A	V/Z
c	Velocidad de la luz en el vacío	m/s	$\frac{m}{s}$
R	Resistencia	Ohm	$\rho \frac{l}{S}$
M	Inductancia mutua	H	$\frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int_{c_i} d^3x_i \int_{c_j} d^3x_j \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}_j)}{ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j }$
Q	Carga eléctrica	A s	$\int_V \rho d^3x$
n	Índice de refracción	1	$\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
α	Polarizabilidad	cm^3	...
ϵ	Permitividad eléctrica	F/m	...
μ	Permeabilidad	H/m	...
ρ	Densidad de carga eléctrica	A s/m ³
φ	Fase del campo electromagnético	1
λ	Longitud de onda	m	$\frac{c}{\omega}$
ω	Frecuencia	Hz	$\frac{c}{\lambda}$
Σ	Fuerza electromotriz	V	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
Φ	Flujo magnético	A m ²	$\int_A \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$

Subíndices

Subíndice	Término
par	Modo par de resonancia
impar	Modo impar de resonancia
loc	Local
p	Campo generado por el arreglo de dipolos iguales con valor p
p_0	Campo generado por el dipolo p en el origen del arreglo
S	Superficial
e	Eléctrico
m	Magnético
PCI	Polarización circular izquierda
PCD	Polarización circular derecha
PLC	Polarización lineal cruzada

Superíndices

Superíndice	Término
inc	Incidente
ind	Inducido
Anillo	Referente a las dimensiones del anillo
ee	Eléctrico-eléctrico
mm	Magnético-magnético
em	Eléctrico-magnético
me	Magnético-eléctrico
+	Ondas propagándose de derecha a izquierda en el eje \hat{z}
-	Ondas propagándose de izquierda a derecha en el eje \hat{z}

1 Introducción

En la rama de los materiales electromagnéticos artificiales resaltan las metasuperficies como un campo reciente y de rápido crecimiento debido a que presentan ventajas sobre sus análogos 3D. Entre las aplicaciones importantes de las metasuperficies se encuentran: las superficies selectivas en frecuencia (FSS), los absorbentes perfectos, las superficies de alta impedancia, los convertidores de polarización, las metasuperficies para controlar la forma del frente de onda bien sea transmitido o el reflejado, y por último las metasuperficies no lineales.

Las primeras apariciones de estructuras periódicas con elementos resonadores se dieron hacia el campo de las FSS [1, 2]. Estas superficies, sin embargo, presentaban dos dificultades a la hora de las aplicaciones: la primera, debido a que los elementos resonadores son comparables con la longitud de onda aparecen lóbulos de difracción, y la segunda, al tener únicamente corrientes eléctricas superficiales, su reflexión y transmisión están restringidas a moverse como circunferencias de radio $1/2$ en el plano complejo [3, 4].

En la década de los 60, Veselago propuso la idea de los metamateriales [5]. En el año 1996, Pozar y otros propusieron el concepto de una superficie que retardaba la fase de la onda transmitida como una solución para obtener una lente delgada en el rango de las microondas [6]. Luego de esto, la idea de metasuperficie fue usada para controlar el estado de polarización de una onda incidente [7–12].

Simultáneamente, las metasuperficies adquirieron valor al ser usadas en dispositivos tipo *reflect-arrays* y *transmit-arrays*, con el fin de obtener control sobre el frente de onda. En el caso de un *reflect-array*, se construyó una superficie grabada encima de un sustrato con un plano a tierra en su cara posterior [13–17]. Sin embargo, la antena que suministra la onda incidente debe ser puesta en un ángulo grande respecto de la normal de la superficie con el fin de no dispersar nuevamente la onda reflejada.

Para solucionar esto, el concepto de una superficie transparente que desfase el campo trans-

mitido en un valor determinado empezó a ganar relevancia [6, 18]. Estos primeros intentos se basaban en líneas de desfase conectadas a dos superficies, la primera que recibe la señal incidente y la adapta a dichas líneas de desfase, y la segunda compuesta por un sistema de antenas que radían nuevamente la señal al espacio vacío. Debido a que las antenas tanto receptoras como emisoras tienen tamaños comparables con la longitud de onda de la señal incidente, no es posible modelar este sistema como un medio efectivo. Una metasuperficie posee entonces la ventaja de poder ser vista como una hoja homogénea [16, 19–26]. Pero debido a que estas no poseen un volumen, y por lo tanto, sólo pueden excitar modos corrientes eléctricas superficiales, lo que conlleva como se dijo anteriormente a que la transmisión y reflexión del arreglo esté restringido [3].

En [27] se fabricó una metasuperficie que lograba una transmisión máxima de 0.86 a 10 GHz y un ancho de banda de 24.2 %. La dificultad radicaba en que para lograr todos los desfases de 0 a 2π , eran necesarios 12 resonadores cada uno con geometrías diferentes. Luego de esta propuesta, varios autores diseñaron metasuperficies en cascada, incrementando el rango de fases accesibles con una única geometría, pero haciendo que sus dispositivos fueran gruesos comparados con la longitud de onda del campo incidente [28–34].

En el presente trabajo se diseña una metasuperficie transparente con control total del salto de fase de 0 a 2π en el rango de 0 a 6GHz. La novedad frente a los trabajos anteriores, es que se propone un método sencillo para lograr con una sola geometría todos los desfases. Se presenta el modelo, los resultados de simulación para el caso ideal y con pérdidas, y además se presentan dos posibles aplicaciones de la metasuperficie diseñada, la primera: refracción anómala a 3 GHz, y el control del estado de polarización del campo transmitido sintonizando la frecuencia del campo incidente.

2 Teoría y modelo de circuito

En la literatura [3] es bien conocido que para una hoja de corriente eléctrica superficial (por ejemplo un circuito impreso sobre una cara de un sustrato), el coeficiente de transmisión está restringido a moverse sobre circunferencias en el plano complejo de radio menor a $1/2$ y centrado en $(1/2, 0)$. Para demostrar esto, supongamos incidencia normal de una onda linealmente polarizada sobre dicha hoja (véase Figura 2.1). Las condiciones de contorno del campo tangencial se escriben como:

$$\hat{n}_{21} \times (\mathbf{E}_2^+ - \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-) = 0, \quad (2.1)$$

$$\hat{n}_{21} \times (\mathbf{H}_2^+ - \mathbf{H}_1^+ - \mathbf{H}_1^-) = \mathbf{J}_S. \quad (2.2)$$

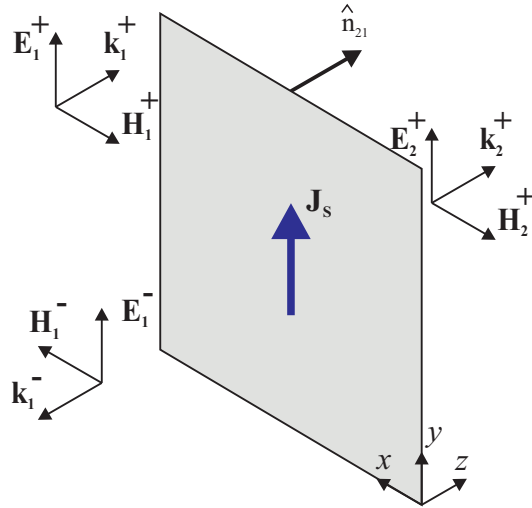


Figura 2.1: Esquema de una hoja de corriente eléctrica superficial \mathbf{J}_S . Una onda linealmente polarizada \mathbf{E}_1^+ incide normalmente a la hoja, y es dispersada en una onda reflejada \mathbf{E}_1^- y una transmitida \mathbf{E}_2^+ .

Reescribamos (2.1) en términos de los coeficientes de transmisión $t = E_2^+/E_1^+$ y reflexión $r = E_1^-/E_1^+$, suponiendo que el estado de polarización es el dado en la Figura 2.1:

$$(t - r - 1) = 0. \quad (2.3)$$

Además, debido a que la superficie está hecha de conductor perfecto, podemos despreciar los efectos de disipación o absorción de energía electromagnética y, por lo tanto, la ley de conservación para la energía electromagnética puede escribirse como:

$$|t|^2 + |r|^2 = 1. \quad (2.4)$$

Podemos de (2.3) reemplazar el coeficiente de reflexión en términos del coeficiente de transmisión, esto es,

$$|t|^2 + |t - 1|^2 = 1, \quad (2.5)$$

recordando que el coeficiente de transmisión es un número complejo que se escribe explícitamente como $t = t_r - jt_i$, es fácil ver que éste está restringido a moverse según la relación de una circunferencia en el plano complejo, es decir,

$$(t_r - 1/2)^2 + t_i^2 = (1/2)^2. \quad (2.6)$$

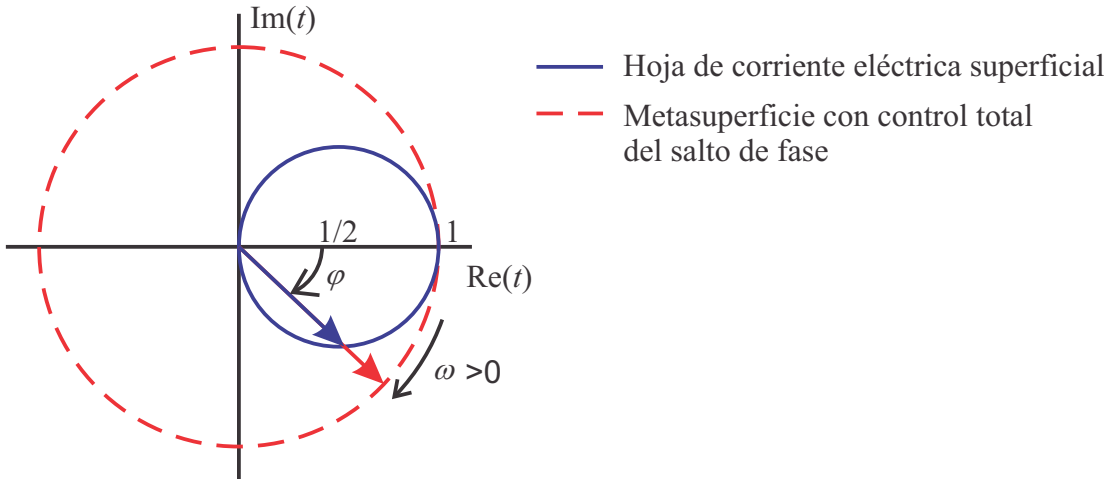


Figura 2.2: Esquema del coeficiente de transmisión en el plano complejo para una hoja de corriente eléctrica superficial (línea sólida) y una metasuperficie transparente con control total del salto de fase del campo transmitido (línea discontinua).

Esto hace que para una hoja de corriente eléctrica superficial el coeficiente de transmisión esté obligado a moverse según la línea sólida (véase Figura 2.2). En la siguiente sección se demostrará que una forma de lograr transparencia en un rango de frecuencias grandes y control total del salto de fase del campo transmitido es violando la condición de contorno para el campo eléctrico tangencial (línea discontinua). Como se verá más adelante, esto implica que la metasuperficie debe poseer un volumen, sin embargo, el espesor de esta debe ser menor a $\lambda/10$ para poder ser llamada superficie.

2.1. Hoja de corrientes superficiales \mathbf{J}_S y \mathbf{K}_S

En la sección anterior, se dijo que una hoja de corriente eléctrica superficial no tiene la capacidad de lograr transparencia en un rango de frecuencia grande y además, un salto de fase de 0 a 2π del campo transmitido. Se dijo además que el motivo de esto era el no tener la capacidad de violar la condición de contorno para el campo eléctrico tangencial a la superficie. Una manera de violar dicha condición de contorno es mediante la inclusión de una corriente magnética superficial \mathbf{K}_S , con lo cual, las condiciones de contorno toman la forma:

$$\hat{n}_{21} \times (\mathbf{E}_2^+ - \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-) = -\mathbf{K}_S, \quad (2.7)$$

$$\hat{n}_{21} \times (\mathbf{H}_2^+ - \mathbf{H}_1^+ - \mathbf{H}_1^-) = \mathbf{J}_S. \quad (2.8)$$

Como se puede apreciar en la Figura 2.3, la corriente eléctrica y la magnética deben ser ortogonales entre sí debido a que se incide con una onda plana linealmente polarizada sobre la hoja. Es claro que en la naturaleza los monopolos magnéticos no existen, y por ende, tampoco deben existir las corrientes magnéticas con el fin de cumplir alguna ley de conservación de la carga. De este modo, debemos encontrar otro origen de dichas corrientes. Para ello, partamos de la definición del dipolo eléctrico,

$$p_x = \int x \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.9)$$

Recordando la ecuación de continuidad de la carga y realizando una integración por partes, podemos escribir (2.9) en términos de la corriente eléctrica superficial como sigue:

$$p_x = -\frac{1}{j\omega} \int [\nabla \cdot (x\mathbf{J}) - (\nabla x) \cdot \mathbf{J}] d^3x, \quad (2.10)$$

donde ω es la frecuencia de la onda incidente a la superficie. Por el teorema de la divergencia, el primer término en (2.10) se transforma en una integral de flujo de la corriente eléctrica a través de la superficie que encierra el volumen de integración, es decir,

$$\int \nabla \cdot (x\mathbf{J}) d^3x = \oint_S \hat{n} \cdot (x\mathbf{J}) d^2x, \quad (2.11)$$

siendo \hat{n} la normal de la superficie (véase Figura 2.3). Si el volumen de integración es infinito, la integral de superficie debe ser nula puesto que no puede existir corriente normal a la misma (además, si la hoja fuera una estructura periódica de pequeños dipolos, la integral debe ser nuevamente nula puesto que las corrientes deben cumplir con las condiciones de frontera en cada celda unidad). De este modo, (2.10) se escribe como

$$p_x = \frac{1}{j\omega} \int_V (\nabla x) \cdot \mathbf{J} d^3x. \quad (2.12)$$

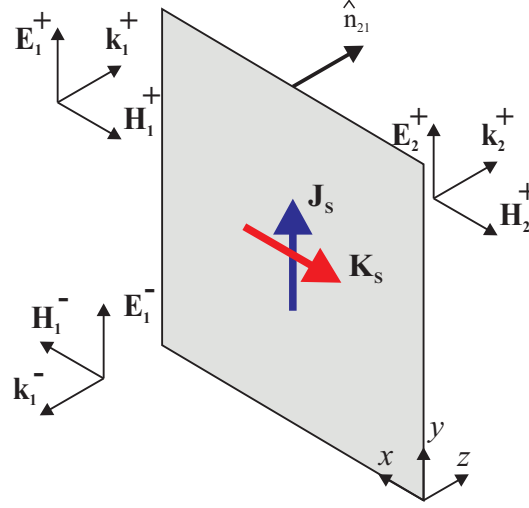


Figura 2.3: Esquema de una hoja de corrientes superficiales \mathbf{J}_S y \mathbf{K}_S . Una onda linealmente polarizada \mathbf{E}_1^+ incide normalmente a la hoja, y es dispersada en una onda reflejada \mathbf{E}_1^- y una transmitida \mathbf{E}_2^+ .

Desarrollando el producto punto en la integral y escribiendo $\mathbf{J} = \mathbf{J}_S \delta(z)$ tenemos (aquí se han despreciado los dipolos normales a la superficie, puesto que bajo incidencia normal las condiciones de contorno se cumplen inmediatamente)

$$p_x = \frac{1}{j\omega} \int_V J_{Sx} \delta(z) d^3x. \quad (2.13)$$

Recordemos que el promedio de una función f se define como $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$, de este modo, (2.13) puede escribirse en función de la corriente promedio sobre la superficie como:

$$p_x = \frac{S}{j\omega} \left\{ \frac{1}{S} \int_S J_{Sx} d^2x \right\} = \frac{S}{j\omega} \langle J_{Sx} \rangle, \quad (2.14)$$

donde S es el área de la superficie. Sin pérdida de generalidad, podemos escribir (2.14) en forma vectorial,

$$\mathbf{p} = \frac{S}{j\omega} \langle \mathbf{J}_S \rangle. \quad (2.15)$$

Finalmente, la corriente eléctrica superficial promedio sobre la superficie será proporcional al dipolo eléctrico de la misma,

$$\mathbf{J}_S = \frac{j\omega}{S} \mathbf{p}. \quad (2.16)$$

Ahora veamos la naturaleza de la corriente magnética, para ello partamos de la definición del dipolo magnético,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J} d^3x. \quad (2.17)$$

Si hubiera loops de corriente normales a la superficie, el producto vectorial de la integral de arriba puede ser interpretado como una corriente magnética tangente a la superficie \mathbf{K} . Además, si dichos loops tienen un tamaño pequeño comparado con la longitud de onda del campo incidente $\sim \lambda/10$, dicha corriente puede ser tomada como una corriente superficial $\mathbf{K} = \mathbf{K}_S \delta(z)$. Según esto, podemos escribir (2.17) como

$$\mathbf{m} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \int \mathbf{K}_S \delta(z) d^3x. \quad (2.18)$$

De igual manera que para la corriente eléctrica superficial, podemos identificar la corriente magnética efectiva promedio sobre la superficie en términos del dipolo magnético,

$$\mathbf{K}_S = \frac{j\omega\mu_0}{S} \mathbf{m}. \quad (2.19)$$

Aquí μ_0 es la permeabilidad del vacío. En la naturaleza, estamos acostumbrados a entender un material por medio de sus propiedades macroscópicas, sin embargo, también entendemos que dichas propiedades se deben a interacciones microscópicas dentro del material. En este sentido, para lograr transparencia sobre una superficie, podemos aprovecharnos de dichos acoples microscópicos. Como se dijo antes, los loops de corriente deben ser pequeños en comparación de la longitud de onda incidente, luego, podemos ordenar en un arreglo periódico de periodicidad a , loops de corriente normales asociados a la corriente magnética superficial efectiva, y dipolos eléctricos asociados a la corriente eléctrica superficial. Es fácil ver que el efecto promedio de dicho arreglo periódico recupera las ecuaciones (2.16) y (2.19) (aquí el área S es el área de una celda unidad del arreglo, es decir a^2). Este tipo de arreglos recibe el nombre de metasuperficie cuando la periodicidad es a su vez pequeña comparada con la longitud de onda del campo incidente ($\sim \lambda/10$).

De esta manera, escribiremos las condiciones de contorno sobre la superficie (2.7) y (2.8) en términos de las corrientes promedio sobre la superficie:

$$\hat{n}_{21} \times (\mathbf{E}_2^+ - \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-) = -\mathbf{K}_S, \quad (2.20)$$

$$\hat{n}_{21} \times (\mathbf{H}_2^+ - \mathbf{H}_1^+ - \mathbf{H}_1^-) = \mathbf{J}_S. \quad (2.21)$$

En la siguiente sección, estudiaremos las implicaciones a las que conlleva introducir dichas corrientes magnéticas sobre las propiedades electromagnéticas de la superficie, en particular, estudiaremos las polarizabilidades de la misma. Mas adelante hablaremos sobre las restricciones que se derivan de suponer transparencia sobre la superficie, es decir, $r = 0$ y $|t| = 1$.

2.2. Condición de transparencia

Se puede escribir el dipolo eléctrico de la hoja de corrientes en función del campo incidente a la misma \mathbf{E}_1^+ mediante la polarizabilidad eléctrica de la misma:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \hat{\hat{\alpha}}_e \cdot \mathbf{E}_1^+. \quad (2.22)$$

Donde $\hat{\hat{\alpha}}_e$ es la polarizabilidad eléctrica de la superficie (en un arreglo de un sólo dipolo, la polarizabilidad eléctrica definida anteriormente es igual a la definición usual [35], para distinguir de la anterior acá usaremos la convención adoptada en [36]). Por dualidad, escribimos el dipolo magnético de la superficie en términos del campo magnético incidente \mathbf{H}_1^+ como se muestra a continuación:

$$\mathbf{m}/c = \epsilon_0 Z_0 \hat{\hat{\alpha}}_m \cdot \mathbf{H}_1^+. \quad (2.23)$$

Sin embargo, esta no es la manera mas general de escribir los dipolos eléctricos. En general, los campos eléctricos pueden excitar dipolos magnéticos y viceversa, por ejemplo, pensemos en un sistema como el representado en la Figura 2.5, claramente el campo eléctrico excita tanto el dipolo eléctrico en el gap como el magnético generado por el loop de corriente inducido sobre el anillo de metal (al igual que el flujo de campo magnético excita tanto el loop de corriente sobre el anillo de metal como el condensador del gap). De este modo, las expresiones de arriba están incompletas debido a que no consideran dichos acoples, por lo tanto, escribimos:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \hat{\hat{\alpha}}_{ee} \cdot \mathbf{E}_1^+ + \epsilon_0 Z_0 \hat{\hat{\alpha}}_{em} \cdot \mathbf{H}_1^+, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{m}/c = \epsilon_0 \hat{\hat{\alpha}}_{me} \cdot \mathbf{E}_1^+ + \epsilon_0 Z_0 \hat{\hat{\alpha}}_{mm} \cdot \mathbf{H}_1^+. \quad (2.25)$$

Donde $\hat{\hat{\alpha}}_{ee}$ y $\hat{\hat{\alpha}}_{mm}$ son las polarizabilidades eléctrica y magnética definidas en (2.22) y (2.23), mientras que $\hat{\hat{\alpha}}_{em}$ y $\hat{\hat{\alpha}}_{me}$ son los acoples magneto-eléctricos de la superficie. Supongamos que incidimos sobre una superficie con una onda polarizada linealmente como se muestra en la Figura 2.3, y además que tenemos transparencia en dicha superficie, lo que se traduce en términos de los campos eléctricos como $E_1^- = 0$ y $E_2^+ = E_1^+ e^{j\varphi}$. De las ecuaciones 2.16 y 2.19 y las condiciones de contorno sobre los campos tangenciales podemos expresar las polarizabilidades de la superficie como,

$$\hat{\alpha}_{yy}^{ee} - \hat{\alpha}_{yx}^{em} \sim (e^{j\varphi} - 1), \quad (2.26)$$

$$\hat{\alpha}_{xy}^{me} - \hat{\alpha}_{xx}^{mm} \sim -(e^{j\varphi} - 1). \quad (2.27)$$

Es fácilmente demostrable que cuando se realiza una inversión temporal, las ecuaciones de arriba llegan a una contradicción, luego, una metasuperficie transparente debe necesariamente poseer acoples magneto-eléctricos nulos, necesitamos tener en mente además que para lograr transparencia deben existir loops de corriente eléctrica normales a dicha superficie. En

las siguientes subsecciones, se utilizarán estos resultados junto con las condiciones de contorno para encontrar explícitamente los valores de las polarizabilidades eléctrica y magnética en términos de los coeficientes de reflexión y transmisión, y posteriormente, aplicar la condición de transparencia.

2.2.1. Corriente eléctrica superficial

Empecemos por la condición de contorno del campo magnético tangencial. Podemos reescribir (2.21) en términos del campo eléctrico mediante la relación de impedancia de onda en el vacío:

$$\langle \mathbf{J}_S \rangle = \frac{1}{Z_0} [-\mathbf{E}_2^+ + \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-], \quad (2.28)$$

donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ es la impedancia de onda en el vacío, y, ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente. Recordemos que la corriente eléctrica promedio sobre la superficie se debe a la acción de los pequeños dipolos eléctricos del arreglo, por lo tanto, y suponiendo que todos los dipolos posean el mismo valor, podemos relacionar dicha corriente eléctrica con el dipolo de una celda unidad gracias a (2.16). Luego, (2.28) se escribe como sigue:

$$\frac{j\omega}{a^2} \mathbf{p} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [-\mathbf{E}_2^+ + \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-]. \quad (2.29)$$

Recordemos ahora que el dipolo eléctrico en la celda unidad puede ser escrito en términos del campo incidente por medio de la polarizabilidad eléctrica según (2.22), luego:

$$\frac{j\omega}{a^2} \epsilon_0 \hat{\alpha}_e \mathbf{E}_1^+ = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [-\mathbf{E}_2^+ + \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-]. \quad (2.30)$$

Suponiendo que los dipolos de la metasuperficie son paralelos a los campos incidentes, podemos afirmar que si no hay efectos de polarización cruzada los campos transmitido y reflejado poseen el mismo estado de polarización del campo incidente. Por lo tanto, es fácil darse cuenta que la polarizabilidad eléctrica de la metasuperficie puede ser escrita en términos de los coeficientes de reflexión r y transmisión t como sigue:

$$\hat{\alpha}_e = \frac{ja^2}{k_0} [t + r - 1]. \quad (2.31)$$

2.2.2. Corriente magnética superficial

Estudiemos ahora la condición de contorno para el campo eléctrico tangencial (2.20). Podemos escribir la corriente magnética superficial en términos del dipolo magnético de una celda unidad suponiendo que el arreglo sea de dipolos idénticos. De este modo, escribimos

$$\frac{j\omega\mu_0}{a^2}\mathbf{m} = (\mathbf{E}_2^+ - \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-) \times \hat{n}_{21}. \quad (2.32)$$

Recordemos que el dipolo magnético de la celda unidad se relaciona con el campo magnético incidente a la misma mediante (2.23), y además que para una onda plana, ambos campos se relacionan mediante la impedancia de onda. Gracias a esto, escribimos la ecuación anterior en términos del campo eléctrico como sigue:

$$\frac{j\omega}{ca^2}\hat{\alpha}_m\hat{n}_{21} \times \mathbf{E}_1^+ = -\hat{n}_{21} \times (\mathbf{E}_2^+ - \mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1^-). \quad (2.33)$$

Finalmente, si suponemos que los dipolos de cada celda unidad de la metasuperficie son paralelos al campo incidente, podemos escribir la polarizabilidad magnética en términos de t y r como se muestra a continuación,

$$\hat{\alpha}_m = \frac{ja^2}{k_0} [t - r - 1]. \quad (2.34)$$

El paso a seguir es aplicar la condición de transparencia sobre las polarizabilidades de la metasuperficie. Recordemos que dicha condición se traduce en imponer que los coeficientes de reflexión y transmisión sean $r = 0$ y $|t| = 1$ respectivamente. Como estos coeficientes son números complejos, la forma mas general de escribir este último es $t = e^{j\varphi}$. Es fácil darse cuenta que al imponer transparencia, las polarizabilidades (2.31) y (2.34) deben cumplir la siguiente relación:

$$\hat{\alpha}_e = \hat{\alpha}_m = \frac{jS}{k_0} [e^{j\varphi} - 1]. \quad (2.35)$$

Evaluemos (2.35) para distintos saltos de fase entre 0 y 2π . Podemos ver que las polarizabilidades tienen la forma de una circunferencia en el plano complejo centrada en el eje real (véase Figura 2.4(a)). Nos podemos dar cuenta que la parte imaginaria de 2.35 siempre es negativa mientras que su parte real tiene un cambio de signo justo cuando el salto de fase es π . Esto es parecido a una resonancia Lorentziana,

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}, \quad (2.36)$$

siendo ω la frecuencia de la fuente, ω_0 la frecuencia de resonancia del sistema, y, γ es el factor de amortiguamiento. Aquí es fácil ver que cuando ω está muy próxima a la resonancia la

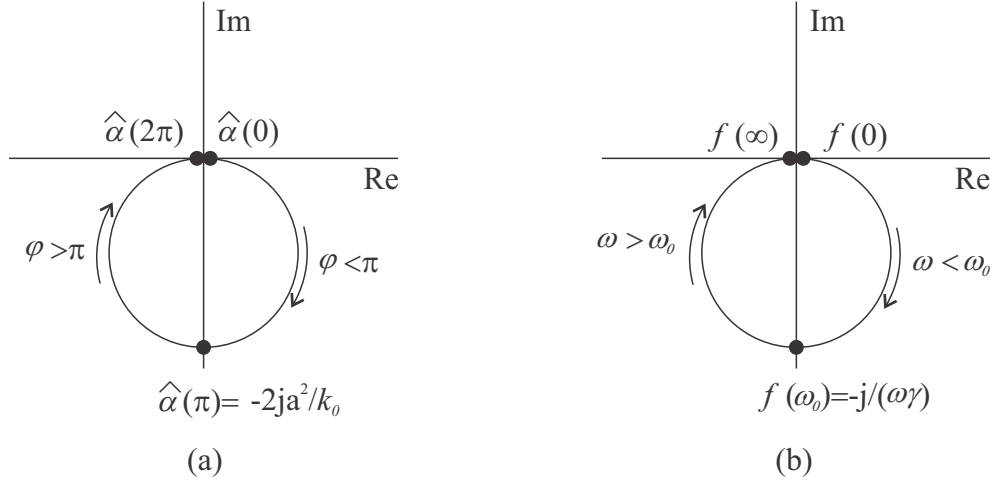


Figura 2.4: Esquema comparativo entre la polarizabilidad requerida (a) y una resonancia de tipo lorentziana (b). Ambas relaciones son circunferencias en el plano complejo, en el caso de las polarizabilidad, la circunferencia se recorre en un cambio en la fase de 0 a 2π , mientras que en el caso de la resonancia de tipo Lorentziana, la circunferencia es recorrida en un cambio en la frecuencia de 0 a ∞ .

parte real de 2.36 tiene un cambio de signo mientras que su parte imaginaria es muy grande pero siempre negativa (véase Figura 2.4 (b)).

Recordemos que necesitamos tanto corrientes eléctricas tangentes a la superficie, como loops de corriente normales a la misma. Además de acuerdo a lo anterior, necesitamos que cada celda unidad posea una resonancia en frecuencia parecida a una Lorentziana. En la siguiente sección vamos a desarrollar un modelo de circuito que nos permita mediante el diseño de un único resonador, transparencia del arreglo periódico.

2.3. Modelo de circuito para un arreglo de resonadores en el vacío

Como vimos en la sección anterior, una vía para cumplir la condición de transparencia sobre una superficie es la de tener un arreglo periódico de resonadores. Dichos resonadores deben poseer tanto corrientes tangentes como loops normales a la superficie. Para lograr los loops de corriente eléctrica normal, se usan anillos conductores. Sin embargo, debido a que también es necesario tener una corriente eléctrica superficial, se debe realizar un corte en dichos anillos.

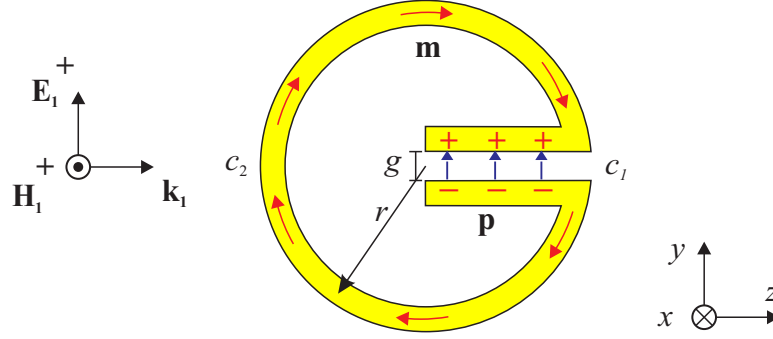


Figura 2.5: Esquema del resonador constituyente de la celda unidad el cual está basado en un resonador tipo SRR [37]. En esencia, la respuesta eléctrica del resonador se debe al gap generado en la sección c_1 , mientras que la respuesta magnética en el resonador se debe a la circulación de corriente eléctrica por la cinta de metal en la sección c_2 .

En la Figura 2.5 se representa una celda unidad del arreglo periódico compuesta por un anillo conductor con un gap en uno de sus lados.

Si las dimensiones del resonador son pequeñas ($\sim \lambda/10$), el campo incidente induce una corriente uniforme sobre el anillo. Bajo esta aproximación, la respuesta de los resonadores se reduce a la de un circuito RLC. Para ello, se parte de la ley de inducción de Faraday para el campo total:

$$\oint_c \mathbf{E}_{\text{tot}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m^{\text{tot}}}{dt}, \quad (2.37)$$

donde $\Phi_m^{\text{tot}} = \mu_0 \int_A \mathbf{H}^{\text{tot}} d^2x$ es el flujo magnético total sobre el área encerrado por el contorno c . El lado izquierdo de la ecuación (2.37) es debido a la acción del campo eléctrico total en el resonador, la cual se puede dividir en dos acciones, la del anillo de metal la cual tiene un comportamiento resistivo, y la del gap del resonador la cual puede ser caracterizada como un comportamiento capacitivo. De acuerdo a lo anterior, dividamos la integral de línea del campo eléctrico en los dos caminos propuestos en la Figura 2.5, esto es,

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{c_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{c_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.38)$$

$$= \int_{c_1} (\mathbf{E}_1^+ + \mathbf{E}^{\text{ind}}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{c_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.39)$$

$$= \int_{c_1} \mathbf{E}_1^+ \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{j\omega C} I + \int_{c_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.40)$$

En la ecuación (2.39) hemos separado las contribuciones del campo eléctrico incidente (\mathbf{E}_1^+) y el inducido sobre el gap (\mathbf{E}^{ind}), el cual es proporcional a la capacitancia C del mismo, y,

a la corriente I inducida en el resonador. Debido a que el tamaño del resonador es pequeño comparado con la longitud de onda ($\sim \lambda/10$), el primer término en (2.40) puede ser escrito como:

$$\int_{c_1} \mathbf{E}_1^+ \cdot d\mathbf{l} = -E_{1y}^+ g. \quad (2.41)$$

Por otro lado, el tercer término en (2.40) puede ser sustituido por la resistividad del material haciendo uso de la ley de Ohm, es decir:

$$\int_{c_2} \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi(r - g) \frac{\rho}{w} J_l^{\text{ind}} w = RI, \quad (2.42)$$

donde J_l^{ind} es la densidad de corriente inducida sobre el anillo resonador, ρ su resistividad, w es el ancho de la tira de metal, R la resistencia total del anillo (aún cuando el anillo resonador esté hecho de conductor perfecto, todavía existe un tipo de resistencia asociada a la radiación de energía del anillo al espacio vacío R_{rad} , en general, se considera R como todas las fuentes de resistencia en el arreglo). Separemos ahora el lado derecho de (2.37), términos del campo magnético incidente \mathbf{H}_1^+ y el campo inducido en el anillo \mathbf{H}^{ind} :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_y^{\text{ext}} g + \frac{1}{j\omega C} I + RI = -\frac{d\Phi_m^{\text{ind}}}{dt} - \frac{\Phi_{1m}^+}{dt}, \quad (2.43)$$

el flujo del campo magnético interno es esencialmente la inductancia del resonador L multiplicado por la corriente I inducida sobre el mismo,

$$\Phi_m^{\text{ind}} = \int_A \mu_0 \mathbf{H}^{\text{ind}} \cdot d\mathbf{A} = LI. \quad (2.44)$$

Debido a que el resonador es pequeño comparado con la longitud de onda del campo incidente, podemos escribir el flujo del campo magnético incidente sobre el resonador como:

$$\Phi_{1m}^+ = \mu_0 \int_A \mathbf{H}_1^+ \cdot \hat{x} d^2x = -\mu_0(\pi r^2) H_{1x}^+. \quad (2.45)$$

Finalmente, podemos escribir (2.37) en términos de los parámetros del resonador organizando los términos de fuentes en la derecha y la respuesta del resonador a la izquierda:

$$RI + \frac{1}{j\omega C} I + j\omega LI = gE_y^{\text{ext}} + j\omega\mu_0(\pi r^2) H_x^{\text{ext}}. \quad (2.46)$$

La respuesta de los anillos resonadores, como se dijo antes, es la de un circuito RLC. Como es usual, podemos hallar la frecuencia de resonancia del circuito si igualamos a cero el lado izquierdo en 2.46,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.47)$$

Ya se dijo anteriormente en este capítulo que, para cumplir con la condición de transparencia es necesaria una celda unidad con simetría de inversión. De la Figura 2.5 podemos darnos cuenta que la celda propuesta no cumple con dicha condición. Según las propiedades de transformación de los campos electromagnéticos [38], una celda unidad que posea simetría de inversión, debe necesariamente poseer acoples magneto-eléctricos nulos. Gracias al argumento anterior, en la siguiente sección, generalizaremos el modelo de circuito de un arreglo de anillos resonadores libres en el vacío, a uno de dos sub-arreglos acoplados libres en el vacío.

2.4. Modelo de circuito para dos sub-arreglos de resonadores acoplados

En la sección anterior exploramos el modelo de circuito para un anillo resonador libre en el vacío, y llegamos a la conclusión de que este puede ser visto como un circulo RLC en serie cuando su tamaño es pequeño comparado con la longitud de onda de la señal de excitación ($\sim \lambda/10$). Concluimos además que es necesario tener una simetría de inversión en nuestra celda unidad para poder eliminar los acoples magneto-eléctricos y, consecuentemente, poder cumplir con la condición de transparencia. En la Figura 2.6, se presenta la nueva celda unidad

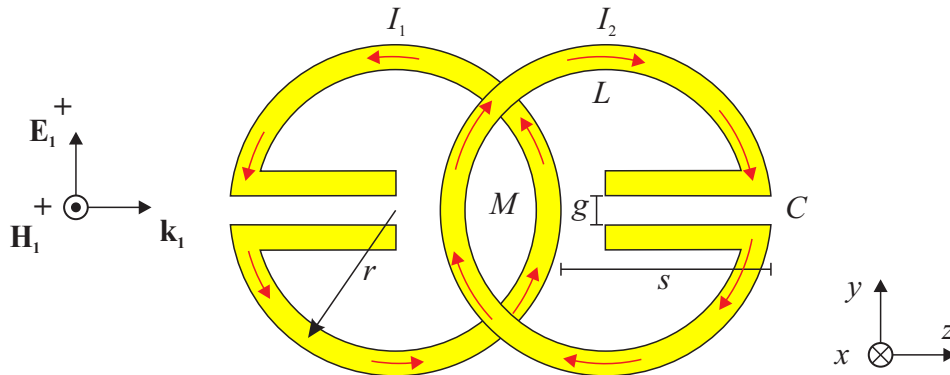


Figura 2.6: Esquema de una celda unidad donde se muestran dos resonadores idénticos salvo una inversión especular en su plano de simetría $\hat{y}-\hat{x}$. Bajo la acción de un campo electromagnético incidente, la respuesta de los anillos se deberá al capacitor en el gap C , la inductancia del anillo L , y por último, el acople magnético entre los dos resonadores M .

compuesta por un anillo resonador y su copia transformada bajo una inversión especular en el plano $\hat{y}-\hat{x}$. Ahora, si las dimensiones de la celda unidad son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la señal incidente, podemos aproximar el sistema a dos circuitos RLC

como el mostrado en la sección anterior, acoplados mediante una inductancia mutua M . En la misma Figura, se puede apreciar que el acople entre los anillos es en esencia debido al flujo magnético que genera el uno sobre el otro.

Debido a la simetría del sistema, dichos flujos magnéticos deben ser iguales de manera que la inductancia mutua M es la misma para los dos resonadores. Habiendo dicho esto, y recordando el modelo de circuito desarrollado en la sección anterior escribimos,

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right) I_1 + M I_2 = \Sigma_1, \quad (2.48)$$

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right) I_2 + M I_1 = \Sigma_2. \quad (2.49)$$

Aquí, los parámetros circuitales de los resonadores son iguales debido a que ambos son copias idénticas entre sí, y además, debido a que su tamaño eléctrico es pequeño comparado con la longitud de onda del campo incidente, el desfase introducido por la propagación de la onda incidente desde el primer arreglo de resonadores, al segundo, puede ser despreciado. Si elegimos el mismo convenio del sentido positivo de la circulación de corriente que para el caso anterior (véase Figura 2.5), las fuentes Σ pueden ser escritas como:

$$\Sigma_1 = j\omega\mu_0 A H_x^{\text{ext}} - g E_x^{\text{ext}}, \quad (2.50)$$

$$\Sigma_2 = j\omega\mu_0 A H_x^{\text{ext}} + g E_x^{\text{ext}}. \quad (2.51)$$

En esencia, lo que tenemos es un problema de auto-valores para una matriz que definiremos como la matriz de impedancia Z . Para ver esto claro, escribamos en forma matricial (2.48) y (2.49):

$$\begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L & M \\ M & R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Definimos entonces nuestros vectores de corriente y de fuentes como:

$$|I\rangle = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad |\Sigma\rangle = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Ahora, la matriz de impedancias se define mediante la ecuación que relaciona los voltajes de entrada al circuito con las corrientes. Si vamos mas allá, esto nos da libertad sobre la elección de dicha matriz Z , en general, para incidencia normal de una onda sobre una estructura compuesta por dos sub-arreglos de anillos resonadores, es claro que en el primer sub-arreglo, todos los resonadores poseen la misma corriente, e igualmente en el segundo sub-arreglo. De esta manera, si la matriz de impedancia cumple con la ecuación

$$\bar{\bar{Z}}|I\rangle = |\Sigma\rangle, \quad (2.54)$$

ésta puede ser una matriz que incorpore todos los términos de acoples posibles de los anillos dentro de sus componentes. Para ver esto más claro, veamos la Figura 2.7. La primera componente de la matriz de impedancias Z_{11} reúne todos los posibles acoples entre los anillos del primer sub-arreglo. Así mismo, la componente Z_{22} , reúne todos los posibles acoples entre los anillos del segundo sub-arreglo. Escribimos explícitamente la matriz de impedancias como:

$$\bar{\bar{Z}} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Ahora, las componentes Z_{12} y Z_{21} reúnen las interacciones entre los dos sub-arreglos de

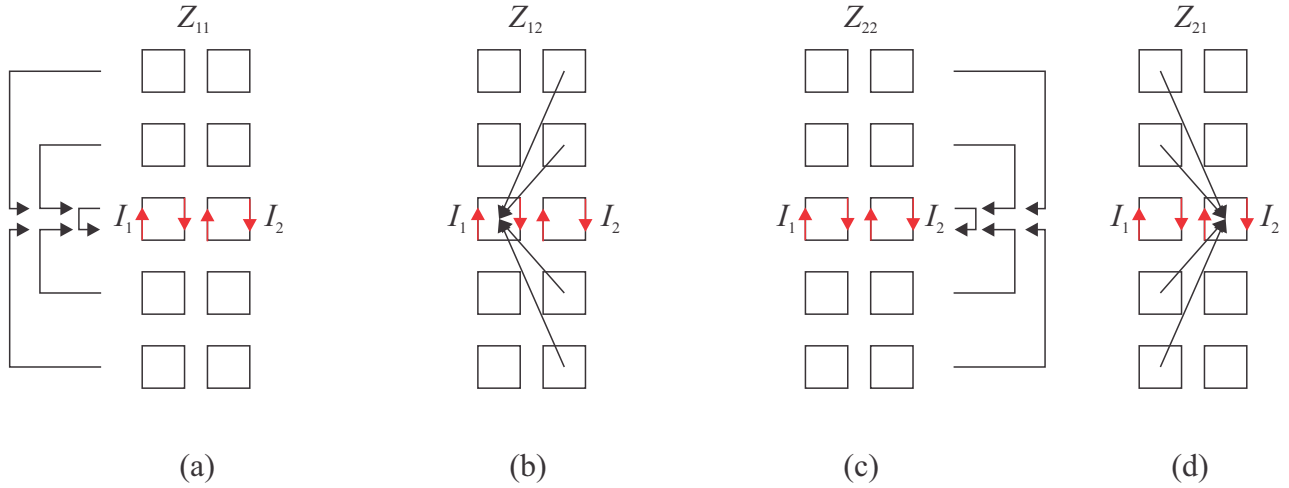


Figura 2.7: Esquema de los acoples entre los sub-arreglos de anillos: (a) Acoples auto-inducidos entre los anillos pertenecientes al sub-arreglo # 1, (b) acoples entre los resonadores del sub-arreglo #1 con el #2, (c) acoples entre los resonadores del sub-arreglo #2 con el #1, y (d) acoples auto-inducidos entre los anillos pertenecientes al sub-arreglo # 2.

anillos. Como sabemos, dichas interacciones se deben tanto al flujo magnético que realiza un anillo sobre el otro, como también la interacción capacitiva que pueda llegar a ocurrir entre ellos (éstas dos interacciones se pueden introducir en los parámetros circuitales L y C si se redefinen para todo el arreglo como parámetros efectivos que en general son números complejos). Como dijimos antes, las ecuaciones de circuito (2.54) pueden ser vistas como un problema de auto-valores de la matriz de impedancia, es decir:

$$\bar{\bar{Z}}|I\rangle = z|I\rangle. \quad (2.56)$$

Podemos solucionar fácilmente 2.56 para el caso $Z_{11} = Z_{22}$ y $Z_{12} = Z_{21}$ y encontrar que los auto-valores z de la matriz de impedancia deben ser,

$$z_{\pm} = Z_{11} \pm Z_{12}. \quad (2.57)$$

Como vemos, el sistema posee dos modos normales de oscilación de la corriente sobre los resonadores. Dichos modos están asociados a un comportamiento eléctrico o magnético de la estructura, es decir, a modos donde el dipolo total sobre la celda unidad es magnético o eléctrico. Para ver esto claro, se puede expandir la ecuación (2.54) en la base de la matriz de impedancia.

2.4.1. Modos normales

Una base natural para la matriz de impedancia es la compuesta por sus auto-vectores. Para el caso particular de una matriz de impedancia simétrica y con $Z_{11} = Z_{22}$, los auto-vectores son:

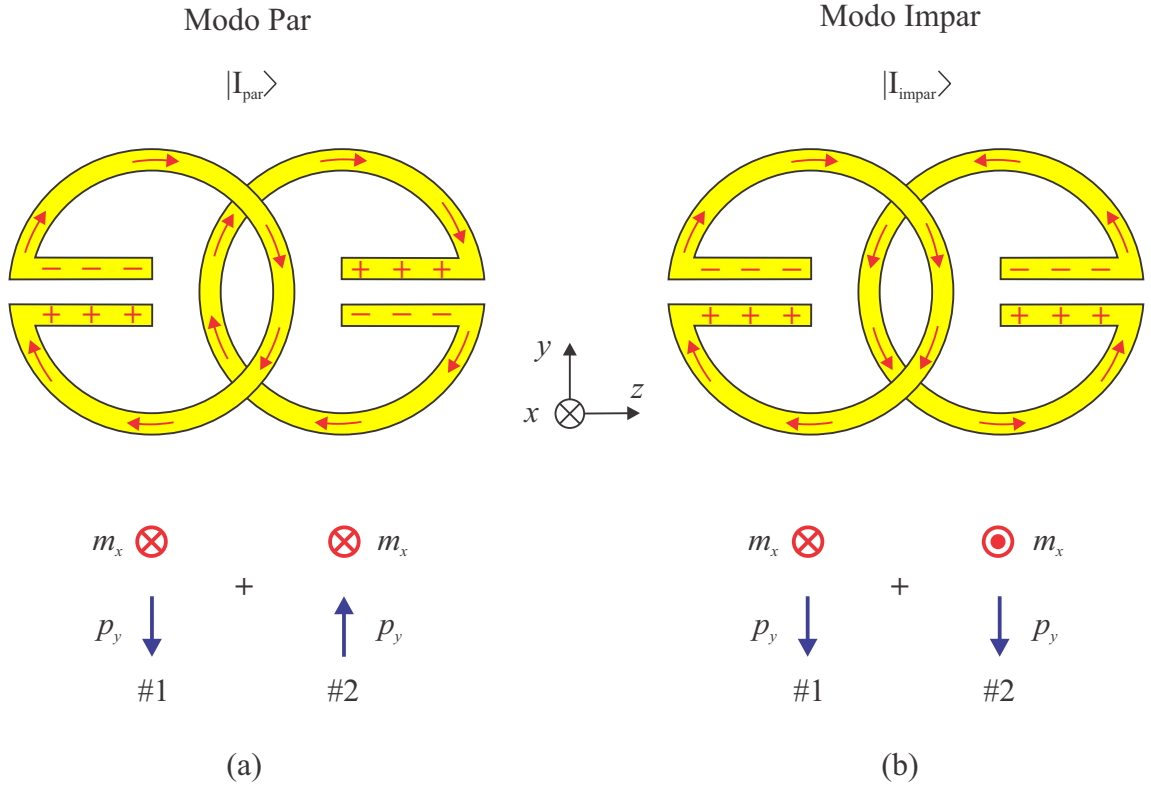


Figura 2.8: Esquema de los dos modos normales de oscilación de la corriente en los resonadores de la metasuperficie. Podemos darnos cuenta que el modo par está asociado a una respuesta magnética de la estructura, como se puede apreciar en el dipolo total de la celda unidad. Contrariamente, el modo impar, está asociado a una respuesta eléctrica de la estructura debido a que el dipolo magnético neto en la celda unidad es nulo

$$|I\rangle_{\text{par}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |I\rangle_{\text{impar}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Podemos expandir cualquier solución de 2.54 para la corriente en términos de dichos auto-vectores de la matriz de impedancia, así, podemos escribir el vector de corrientes inducidas sobre la estructura como,

$$|I\rangle = b_{\text{par}}|I\rangle_{\text{par}} + b_{\text{impar}}|I\rangle_{\text{impar}}, \quad (2.59)$$

siendo b_{par} y b_{impar} las amplitudes de las corrientes asociadas a los modos de resonancia en una frecuencia dada. Introduciendo esta expansión en 2.54 y haciendo uso de la ortogonalidad de los auto-vectores de Z , podemos encontrar que los coeficientes b pueden ser calculados desde las excitaciones mediante la siguiente relación,

$$b_{\text{par}} = \frac{\text{par}\langle I|\Sigma\rangle}{z_+}. \quad (2.60)$$

$$b_{\text{impar}} = \frac{\text{impar}\langle I|\Sigma\rangle}{z_-}. \quad (2.61)$$

Recordemos que el vector de excitaciones Σ se escribe según 2.53, luego, podemos escribir explícitamente los coeficientes en términos de los campos incidentes E_1^+ y H_1^+ como sigue:

$$b_{\text{par}} = \frac{1}{\sqrt{2}z_+}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{\sqrt{2}j\omega\mu_0\pi r^2 H_{1x}^+}{Z_{11} + Z_{12}}, \quad (2.62)$$

$$b_{\text{impar}} = \frac{1}{\sqrt{2}z_-}(\Sigma_1 - \Sigma_2) = -\frac{\sqrt{2}gE_{1y}^+}{Z_{11} - Z_{12}}. \quad (2.63)$$

Como mencionamos anteriormente, el modo par se excita únicamente con el campo magnético, y se debe a que las corrientes inducidas en los resonadores poseen el mismo sentido de circulación. Por otro lado, el modo impar asociado a una respuesta eléctrica de la estructura, se debe a que las corrientes inducidas sobre los anillos resonadores poseen sentidos de circulación contrarios. Escribamos ahora $|I\rangle$ de forma explícita:

$$|I\rangle = \frac{\sqrt{2}j\omega\mu_0\pi r^2 H_{1x}^+}{Z_{11} + Z_{12}}|I\rangle_{\text{par}} - \frac{\sqrt{2}gE_{1y}^+}{Z_{11} - Z_{12}}|I\rangle_{\text{impar}}. \quad (2.64)$$

Ahora bien, recordemos que las componentes del vector de corrientes $|I\rangle$ son las corrientes inducidas en cada resonador, por lo tanto, podemos escribir la ecuación anterior en componentes como sigue,

$$I_1 = \frac{j\omega\mu_0}{Z_{11} + Z_{12}}\pi r^2 H_{1x}^+ - \frac{g}{Z_{11} - Z_{12}}E_{1y}^+, \quad (2.65)$$

$$I_2 = \frac{j\omega\mu_0}{Z_{11} + Z_{12}}\pi r^2 H_{1x}^+ + \frac{g}{Z_{11} - Z_{12}}E_{1y}^+. \quad (2.66)$$

Ya que tenemos las corrientes inducidas en cada resonador en términos de los campos incidentes y las impedancias, podemos aplicar la condición de transparencia para la estructura. Para ello, necesitamos encontrar los dipolos inducidos en cada celda unidad, y consecuentemente las polarizabilidades de la estructura. Según la definición del dipolo eléctrico (2.9), y bajo la suposición de que los resonadores poseen un tamaño eléctrico pequeño comparado con la longitud de onda podemos darnos cuenta que:

$$p_y = \frac{g}{j\omega}(I_1 - I_2). \quad (2.67)$$

Reemplacemos 2.65 y 2.66 y encontremos el dipolo eléctrico total inducido en la celda unidad en términos del campo incidente E_1^+ :

$$p_y = -\frac{2g^2}{j\omega(Z_{11} - Z_{12})}E_{1y}^+. \quad (2.68)$$

Como esperábamos, el dipolo eléctrico de la estructura sólo puede ser excitado por el campo eléctrico incidente y además, el modo de resonancia impar de la estructura está relacionado con una respuesta eléctrica de la misma. Veamos ahora el dipolo magnético total inducido sobre la celda unidad. Para ello, recordemos la definición del dipolo magnético dada por (2.17), y además consideremos que los resonadores poseen tamaño eléctrico pequeño (luego, es válido suponer que la corriente inducida en el anillo es uniforme y además que los términos de desfase son despreciables):

$$m_x = m_{1x} + m_{2x} = \pi r^2(I_1 + I_2). \quad (2.69)$$

Reemplazando finalmente los resultados obtenidos 2.65 y 2.66 tenemos,

$$m_x = \frac{2j\omega\mu_0(\pi r^2)^2}{Z_{11} + Z_{12}}H_{1x}^+. \quad (2.70)$$

De manera análoga, podemos concluir que debido a que el dipolo magnético es excitado únicamente por el campo magnético incidente, y de esta manera, el modo par de la estructura se debe a una respuesta magnética de la misma. Con estos resultados, es posible concluir que debido a que los dipolos son excitados únicamente por los campos de su misma naturaleza, los acoples magneto-eléctricos de la estructura deben ser necesariamente nulos. Recordemos que en la sección 2.2 demostramos que la condición de transparencia se reduce a que las polarizabilidades eléctrica y magnética de la metasuperficie deben ser iguales. De (2.68) y (2.70) podemos obtener las polarizabilidades de la estructura,

$$\alpha_{yy}^{ee} = -\frac{2g^2}{j\omega\epsilon_0(Z_{11} - Z_{12})}, \quad (2.71)$$

$$\alpha_{xx}^{mm} = \frac{2j\omega\mu_0(\pi r^2)^2}{Z_{11} + Z_{12}}. \quad (2.72)$$

Bien, como se dijo antes, la condición de transparencia se reduce a exigir que las polarizabilidades de la estructura sean iguales, luego, para que la metasuperficie compuesta por los dos sub-arreglos de resonadores idénticos sea transparente, se debe cumplir que:

$$-\frac{2g^2}{j\omega\epsilon_0(Z_{11} - Z_{12})} = \frac{2j\omega\mu_0(\pi r^2)^2}{Z_{11} + Z_{12}}. \quad (2.73)$$

Recordemos que las componentes Z_{11} y Z_{12} de la matriz de impedancia dependen de la frecuencia según (2.52), luego, es válido pensar que para que las polarizabilidades se igualen, a lo sumo, deben poseer la misma frecuencia de resonancia. Dicho argumento exige que $Z_{12} = 0$, el cual está relacionado con el acople entre los dos sub-arreglos de anillos. Según la definición de inductancia mutua [38], se puede verificar que existe un cambio de signo entre una configuración co-axial de dos loops de corriente y una co-planar. Esto indica que existe una configuración espacial para la cual dicho acople se hace nulo. Exigiendo que $Z_{12} = 0$, se puede llegar a una condición geométrica de las dimensiones del resonador:

$$\frac{\pi r^2}{\lambda_0 g} \sim \frac{1}{2\pi}. \quad (2.74)$$

La condición de transparencia se reduce a exigir una relación geométrica sobre las dimensiones de los resonadores, además, para que se cumpla esto, es necesario también que los dos sub-arreglos estén desacoplados, lo cual es equivalente a exigir que ambos modos de corriente en los resonadores posean la misma frecuencia de resonancia. Para ver esto claro, podemos recordar que los auto-valores z_{\pm} de la matriz de impedancia Z son las frecuencias de resonancia del circuito. En el siguiente capítulo validaremos el modelo de circuito desarrollado aquí mediante la simulación de una celda unidad a frecuencia de resonancia próxima a los 3GHz.

3 Resultados

Del capítulo anterior se sabe que para lograr transparencia de la metasuperficie, se necesita que las polarizabilidades en los anillos sean iguales. Esto luego se traduce en una condición geométrica sobre las dimensiones de los resonadores. Para que las polarizabilidades sean las mismas, es necesario que sus máximos se igualen en frecuencia, es decir, que los dos modos de la estructura tengan la misma frecuencia de resonancia. En un capítulo anterior, se dijo que esto ocurre solamente cuando el acople M entre los dos anillos es nulo.

Se desea diseñar una metasuperficie que tenga una frecuencia de resonancia cercana a los 3GHz. Para ello, se simula una celda unidad de la estructura hecha con conductor perfecto como la que se muestra en la Figura 3.1. Por experiencia, se pueden ajustar algunos parámetros geométricos de la celda unidad como el radio $r = 4$ mm, el ancho de la cinta de metal $w = 0.5$ mm, el ancho del gap $g = 0.5$ mm, $l = 7$ mm y la separación entre los anillos $b = 0.5$ mm, la cual es un espesor típico de un dieléctrico de baja permitividad en microondas. Se simula la celda unidad con condiciones periódicas en x e y , y bajo incidencia normal de una onda linealmente polarizada en el eje \hat{y} .

De [38], se sabe que variando el deslizamiento espacial s entre los anillos existe una configuración para la cual el acople Z_{12} entre ellos se hace nulo. En la Figura 3.2 (a) se representan los resultados de la simulación obtenidos para la transmisión de la celda unidad mostrada en la Figura 3.1 a distintos valores del deslizamiento. Se puede apreciar que para $s = 2$ mm y $s = 8$ mm, existen dos modos de resonancia de los dos anillos, validando la hipótesis hecha en el capítulo 2 sobre los modos de resonancia par e impar de los anillos. A medida que se varía el deslizamiento entre los anillos, se observa que los dos modos pasan a un estado degenerado en frecuencia (resonancia oculta) para los casos de $s = 5$ mm y $s = 6$ mm. Sin embargo, la transmisión de la metasuperficie es baja ($|t| < 0.5$) en la frecuencia de resonancia $f = 3.45$ GHz.

Haciendo un barrido fino sobre el valor del desplazamiento entre $5 \text{ mm} < s < 6 \text{ mm}$, se muestra que el valor de dicho desplazamiento para el cual se obtiene una máxima transmisión

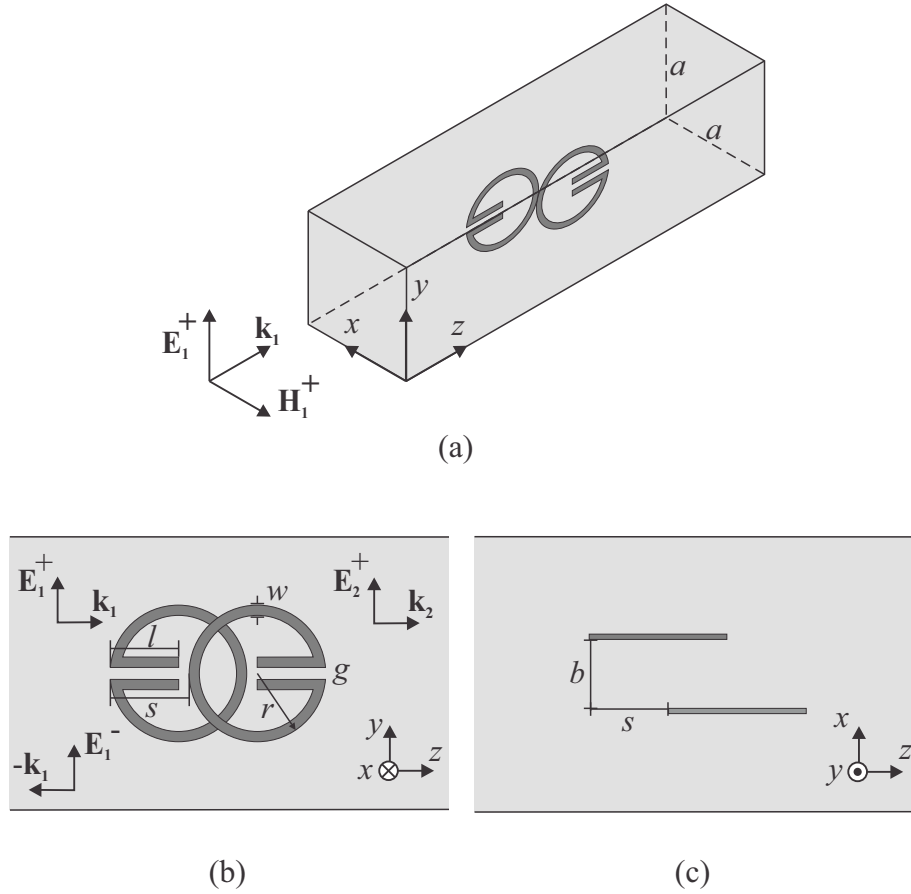


Figura 3.1: (a) Vista en perspectiva de la celda unidad, (b) vista lateral y (c) vista superior. Los parámetros de simulación usados son: $a = 10$ mm, $b = 0.5$ mm, $r = 4$ mm, $w = 0.5$ mm, $g = 0.5$ mm y $l = 7$ mm (por efectos de visibilidad, las dimensiones no se muestran a escala).

a la frecuencia de resonancia es $s = 5.6$ mm. En la Figura 3.2 (b) se aprecia que cuando sucede una resonancia oculta, y se obtiene una variación de la fase de 0 a 2π . La Figura 3.2 (c) muestra los resultados de la simulación para el coeficiente de transmisión en coordenadas polares, teniendo en cuenta que lo que se desea es una circunferencia unitaria en el plano complejo (ver Figura 2.2).

En la Figura 3.3 se muestran la parte real (a) y la imaginaria (b) de las polarizabilidades α de la estructura para distintos parámetros s . La curva negra representa la polarizabilidad magnética α_m de la estructura y la curva roja, representa la polarizabilidad eléctrica α_e . Se puede notar que para valores de s distintos al óptimo, existen dos modos de resonancia como se predijo en la teoría, asociados a un comportamiento magnético (curva negra), y a un comportamiento eléctrico (curva roja) de los anillos. En el caso óptimo de $s = 5.6$ mm,

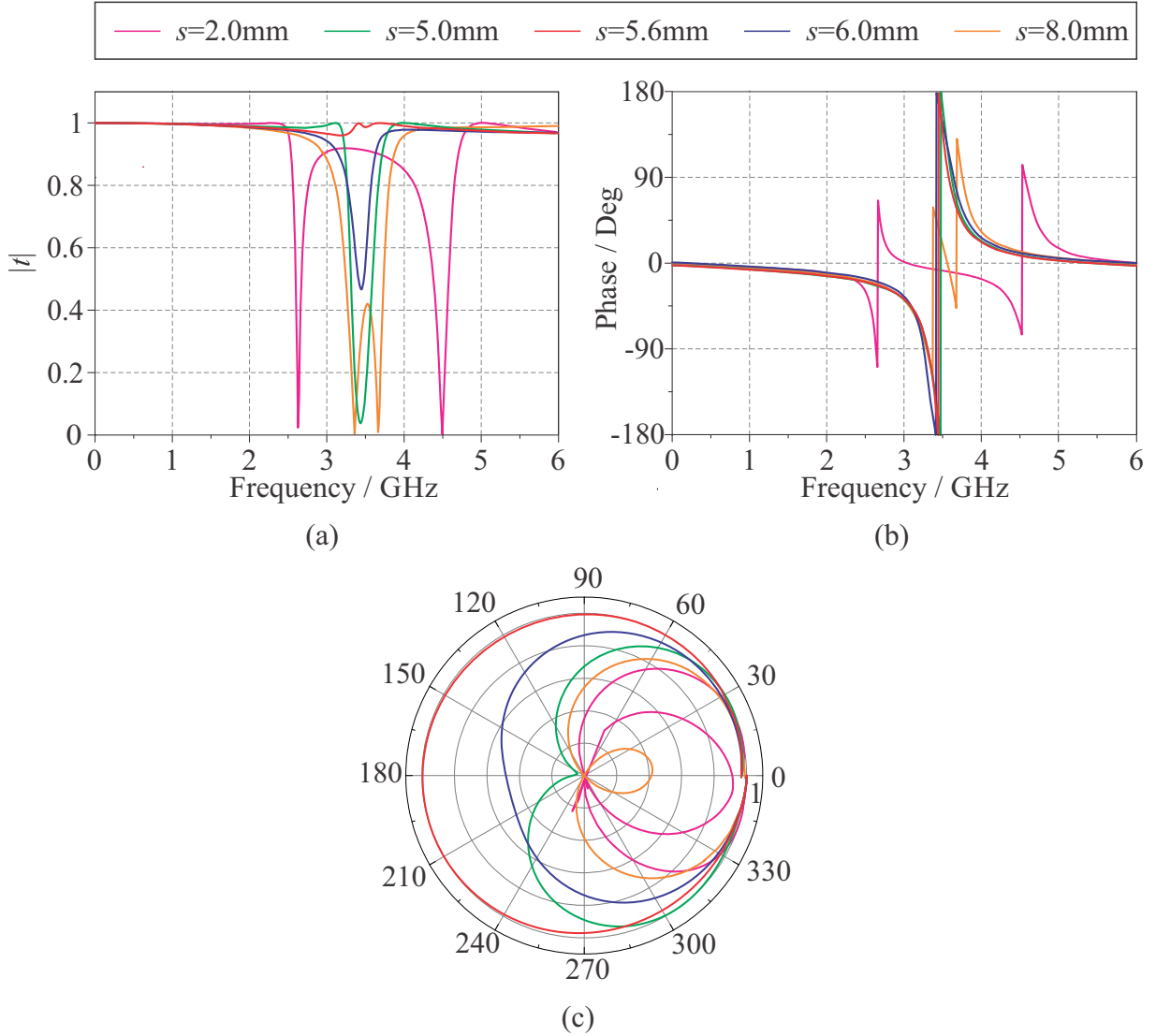


Figura 3.2: Resultados de la simulación de la celda unidad mostrada en la Figura 3.1: (a) módulo de la transmisión, (b) fase y (c) gráfica en coordenadas polares. El pico máximo de transmisión sucede cuando $s = 5.6\text{ mm}$. La frecuencia de resonancia de la metasuperficie es $f = 3.45\text{ GHz}$ y la magnitud de la transmisión obtenida a esta frecuencia es $|t| = 0.99$.

ambas polarizabilidades α_e y α_m poseen frecuencias de resonancia cercanas y, además, sus amplitudes son parecidas, como se predijo en la sección 2.2 para la condición de transparencia (fenómeno que se aprecia mejor en las partes imaginarias).

Luego de haber demostrado el caso ideal se deben concentrar los esfuerzos en diseñar una celda unidad fabricable. Debido a que los conductores perfectos no existen en la naturaleza,

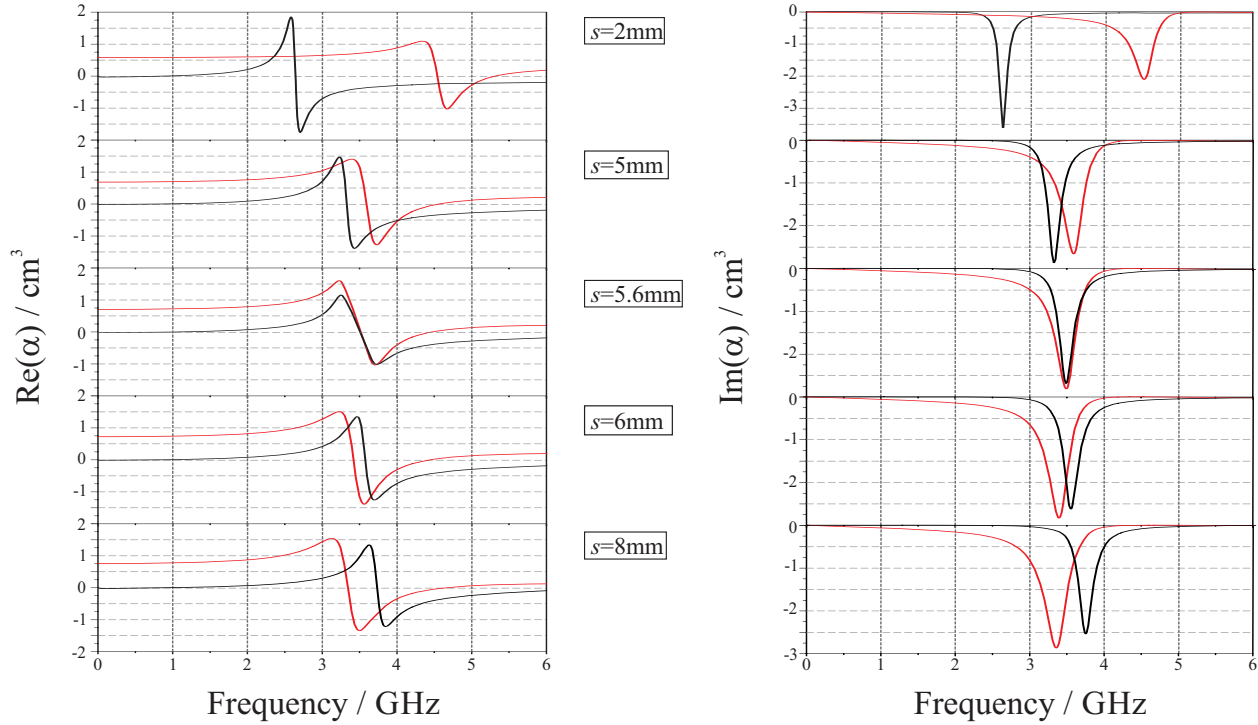


Figura 3.3: Resultados de la simulación para las polarizabilidades de la metasuperficie con una celda unidad hecha de conductor perfecto: (a) parte real y (b) parte imaginaria. La curva negra representa la polarizabilidad magnética $\hat{\alpha}_m$ y la roja la eléctrica $\hat{\alpha}_e$.

es necesario observar si el fenómeno se conserva cuando el anillo está fabricado con cobre. La celda unidad simulada se muestra en la Figura 3.4, los parámetros de simulación se dejarán fijos esta vez con el fin de observar únicamente la acción de la conductividad finita del material.

Como se aprecia en la Figura 3.5 (a), la magnitud del coeficiente de transmisión para el caso de cobre (curva roja) es menor que el caso ideal (curva negra) en la frecuencia de resonancia ($|t| = 0.91$). La caída del coeficiente de transmisión es debida a la conductividad finita del material, en consecuencia, se pierde parte de la energía electromagnética calentando los anillos de cobre. Sin embargo, el comportamiento en frecuencia de la metasuperficie, es decir la frecuencia de resonancia y la fase, se mantiene invariante (véase Figuras 3.5 (b) y (c)).

El paso a seguir para demostrar la viabilidad de fabricación de la estructura es introducir un sustrato que sirva de soporte a los resonadores. Dicho sustrato será ARLON AD250, con una permitividad dieléctrica relativa $\epsilon_r = 2.5(1 - 0.0018j)$ (de 0 a 10GHz) y un espesor de

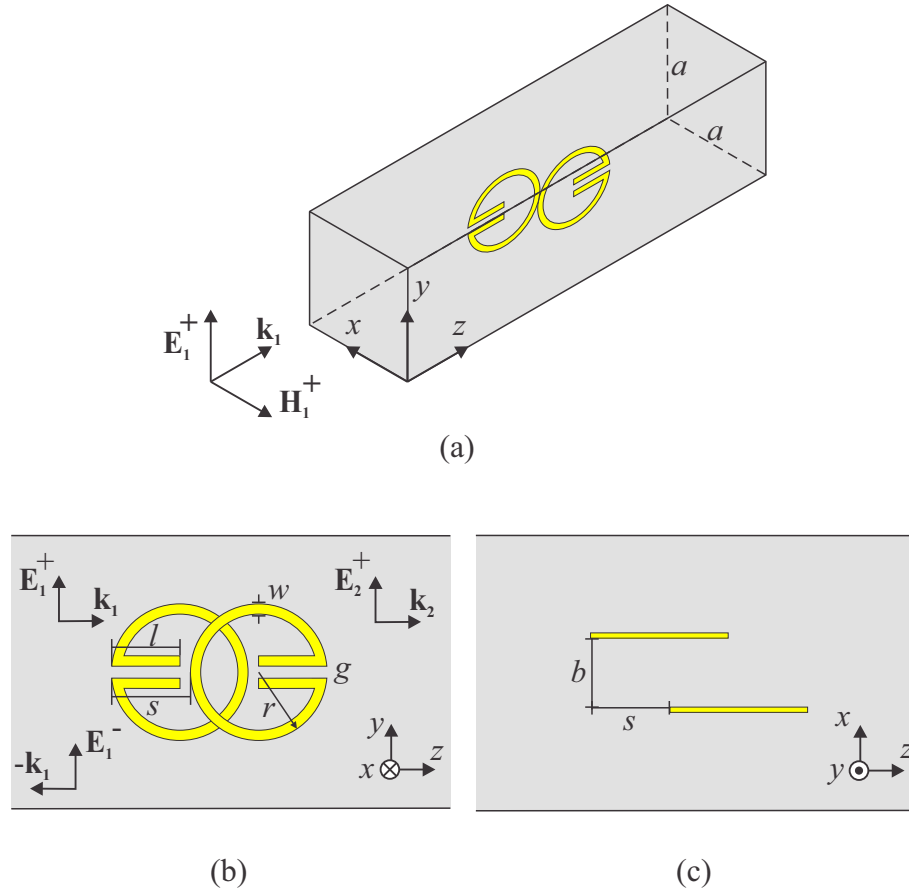


Figura 3.4: a) Vista en perspectiva de la celda unidad, (b) vista lateral y (c) vista superior. Los parámetros de simulación óptimos son: $a = 10$ mm, $b = 0.5$ mm, $r = 4$ mm, $w = 0.5$ mm, $g = 0.5$ mm, $l = 7$ mm y $s = 5.6$ mm (por efectos de visibilidad, las dimensiones de los anillos no están a escala).

$b = 0.5$ mm, el cual representa un valor estándar para sustratos dieléctricos en microondas. La Figura 3.6 muestra la celda unidad de la estructura simulada bajo incidencia normal de una onda plana linealmente polarizada en el eje \hat{y} .

Lo que se espera es que el dieléctrico aumente la polarizabilidad eléctrica de la metasuperficie (la cual, a su vez, está relacionada con la permitividad efectiva de la misma), sin variar apreciablemente la polarizabilidad magnética. Este argumento es justificable dado que un material dieléctrico no posee una respuesta magnética apreciable.

La Figura 3.7 muestra los resultados de la simulación para el modulo del coeficiente de transmisión (a), la fase (b) y en coordenadas polares (c). La curva negra representa la celda unidad hecha con conductor perfecto, mientras que la azul, representa una celda unidad con

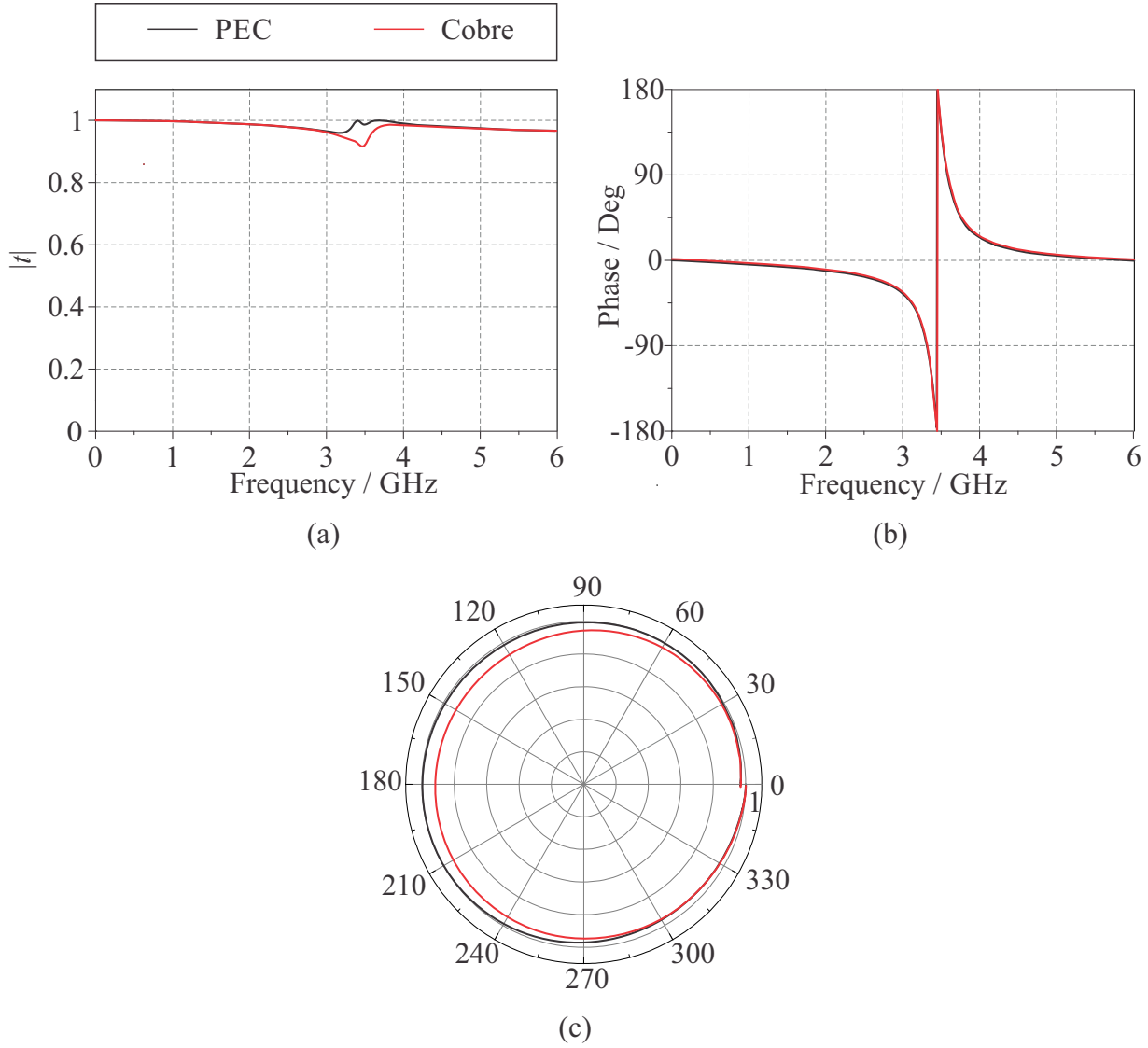


Figura 3.5: Resultados de simulación para la celda unidad descrita en la Figura 3.4: (a) módulo del coeficiente de transmisión, (b) fase y (c) diagrama polar en el plano complejo. La curva negra representa el caso ideal con conductor perfecto y la roja el caso de anillos hechos con cobre. El valor de la magnitud del coeficiente de transmisión a la frecuencia de resonancia de la estructura es $|t| = 0.91$ a la frecuencia de resonancia $f = 3.45\text{GHz}$.

los mismos parámetros geométricos que la anterior pero fabricada con cobre y un sustrato ARLON AD250. Por último la curva roja representa el caso de máxima transmisión para un barrido del parámetro l .

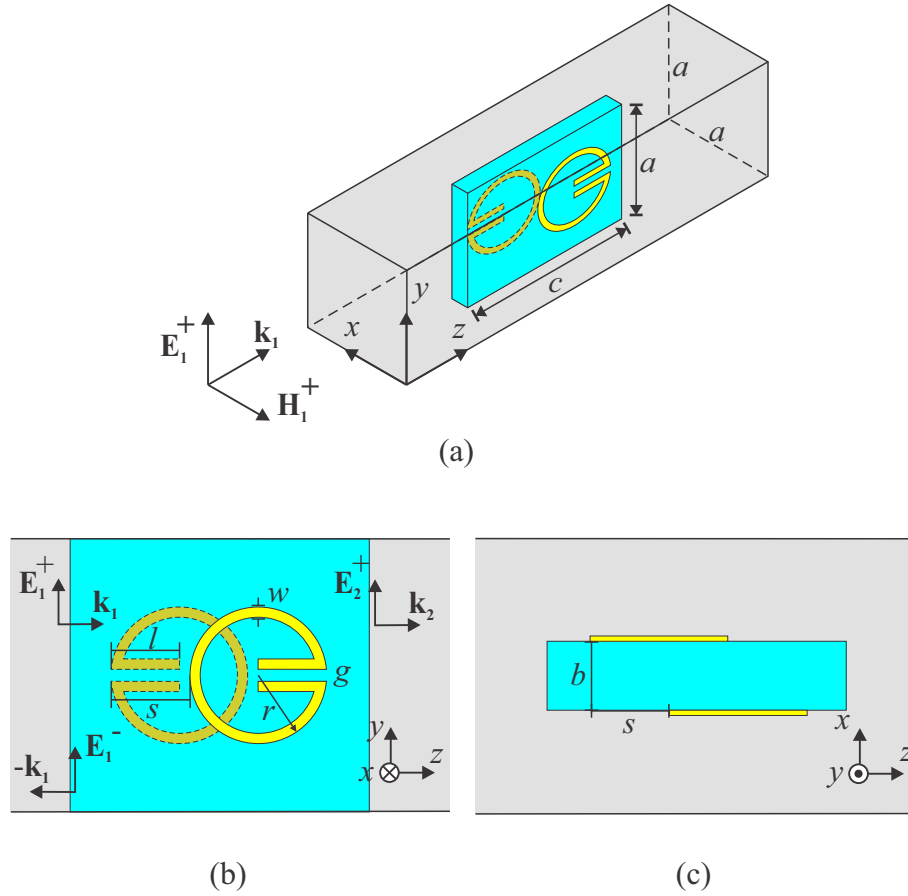


Figura 3.6: a) Vista en perspectiva de la celda unidad, (b) vista lateral y (c) vista superior. Los parámetros de simulación usados son: $a = 10\text{mm}$, $b = 0.5\text{mm}$ (mismo que el espesor del sustrato ARLON AN250), $r = 4\text{ mm}$, $w = 0.5\text{ mm}$, $g = 0.5\text{ mm}$ y $s = 5.6\text{ mm}$. Se hace un barrido del parámetro l con el fin de obtener el valor de máxima transmisión a la frecuencia de resonancia.

Como esperábamos, el valor del coeficiente de transmisión de la celda unidad disminuye cuando se introduce el sustrato, y es debido a que este cambia la capacitancia de la celda unidad, y en consecuencia también lo hace la polarizabilidad eléctrica de la misma. Sin embargo, como ya se dijo antes, el dieléctrico no cambia las propiedades magnéticas de la celda, desajustando así la condición de transparencia. Además, al tener una mayor capacitancia en la celda unidad, la frecuencia de resonancia baja de 3.45 GHz a 2.82 GHz . Para cumplir nuevamente con la condición de transparencia es necesario efectuar un reajuste del parámetro l , el cual está directamente relacionado con la capacitancia de la celda unidad con el fin de retomar la condición de transparencia.

Debido a que las ondas planas no existen en la práctica, en cambio, una onda plana se

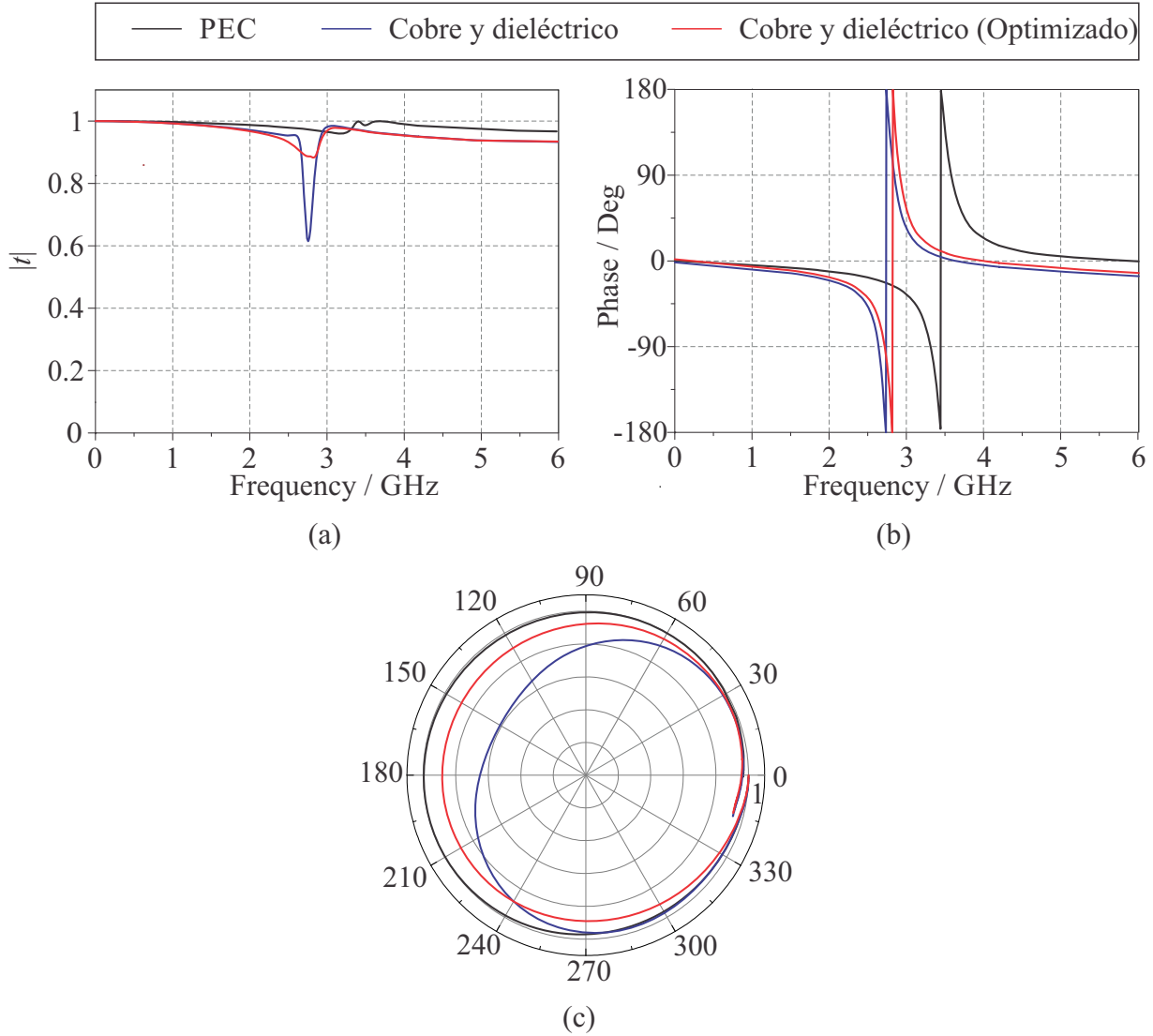


Figura 3.7: Resultados de simulación para la celda unidad descrita en 3.6: (a) módulo del coeficiente de transmisión, (b) fase y (c) diagrama polar en el plano complejo. La curva negra representa el caso ideal hecho por conductor perfecto, la azul representa el caso de cobre y dieléctrico conservando los parámetros geométricos de la Figura 3.1, y la curva roja representa el caso de una celda de cobre y dieléctrico re-ajustando el valor de l de 7 mm a 6.6 mm. La magnitud de la transmisión obtenida es $|t| = 0.88$ a la frecuencia de resonancia $f = 2.82$ GHz.

aproxima con una esférica de radios muy grandes. Una onda esférica puede ser vista en la teoría como varias ondas planas con distintos ángulos de incidencia. Por este hecho, es necesario realizar un estudio de la estabilidad del coeficiente de transmisión en función del ángulo de incidencia. Para ello, se deja fijo el vector de campo eléctrico incidente, y se varía

el ángulo de incidencia del vector de onda. Lo que se espera es que a medida que el ángulo sea mayor, el modelo de circuito pierda validez puesto que el flujo de campo magnético sobre el anillo resonador es menor.

De acuerdo a esto, las polarizabilidades de la metasuperficie se verán desbalanceadas y, por lo tanto, la condición de transparencia no se cumple. La Figura 3.8 muestra los resultados de simulación para el coeficiente de transmisión de la celda unidad descrita en la Figura 3.6 bajo incidencia oblicua de los campos. Se puede apreciar que la frecuencia de resonancia de la estructura se mantiene invariable bajo cambios del ángulo de incidencia.

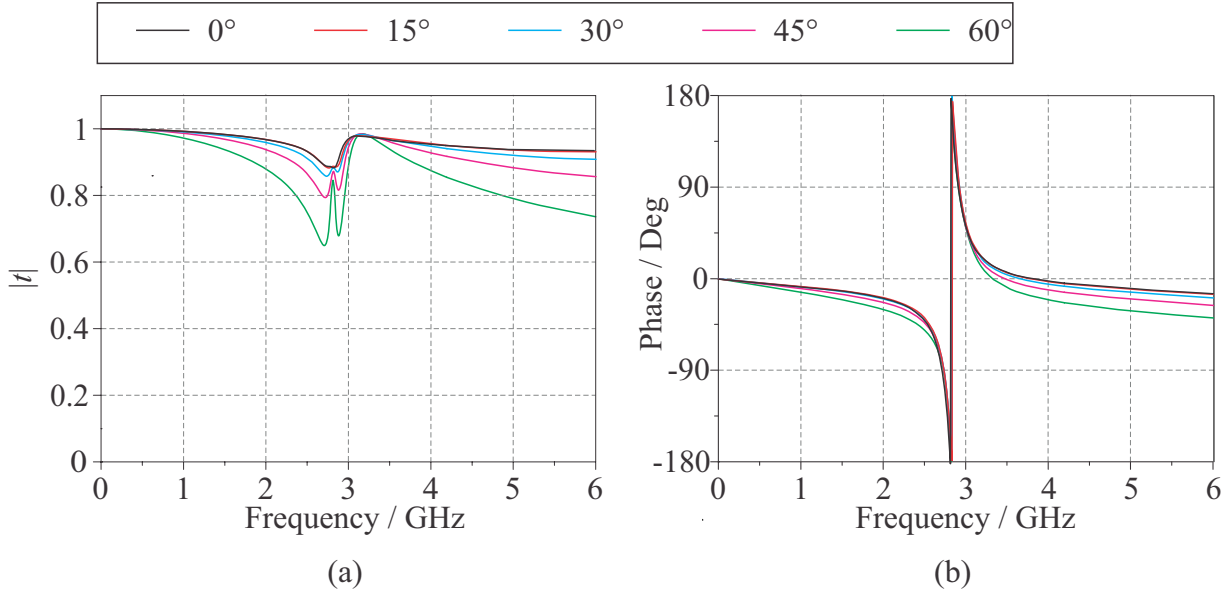


Figura 3.8: Resultados de simulación para la celda unidad descrita en la Figura 3.6 bajo incidencia oblicua: (a) módulo del coeficiente de transmisión y (b) fase. La curva negra representa $\theta = 0^\circ$, la roja $\theta = 15^\circ$, la cyan $\theta = 30^\circ$, la magenta $\theta = 45^\circ$ y la verde $\theta = 60^\circ$.

θ_{inc}	0°	15°	30°	45°	60°
$ t $	0.88	0.88	0.88	0.87	0.84

Tabla 3.1: Valores de la magnitud del coeficiente de transmisión a la frecuencia de resonancia de $f = 2.82$ GHz para los resultados mostrados en la Figura 3.7.

En la tabla 3.1 se muestra la magnitud del coeficiente de transmisión a la frecuencia de resonancia $f = 2.82$ GHz y para distintos ángulos de incidencia. Es apreciable que $|t| < 0.6$

para ángulos $\theta > 60^\circ$, sin embargo, para ángulos entre 15° y 45° el coeficiente de transmisión se mantiene por encima de 0.8 de 0 a 6 GHz.

4 Aplicaciones

4.1. Refracción anómala

En el capítulo 1 se dijo que una posible aplicación para las metasuperficies es la de generar un gradiente de fase tangencial al campo incidente. Con ello, mediante las condiciones de contorno sobre la superficie [39], las leyes de Snell para la reflexión y refracción se pueden generalizar:

$$n_t \sin(\theta_t) - n_i \sin(\theta_i) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (4.1)$$

$$\sin(\theta_r) - \sin(\theta_i) = \frac{\lambda_0}{2\pi n_i} \frac{d\phi}{dx}. \quad (4.2)$$

Donde n_i y n_t representan los índices de refracción para la región incidente y la transmitida respectivamente. Así mismo, los ángulos de reflexión, transmisión e incidencia toman el mismo convenio. La expresión en la derecha de las ecuaciones de arriba están relacionadas con un gradiente de fase en la dirección x . En la Figura 4.1 se representa una superficie compuesta por 12 celdas unidad con una variación espacial de la fase en la coordenada \hat{x} de 30° de una celda a su adyacente. Cada una de las celdas esta compuesta por una pareja de resonadores como los mostrados en la Figura 3.6. Si consideramos incidencia normal sobre una metasuperficie libre en el vacío las ecuaciones (4.1) y (4.2) se transforman en

$$\sin(\theta_t) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (4.3)$$

$$\sin(\theta_r) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dx}. \quad (4.4)$$

A este fenómeno se le llama reflexión y refracción anómala, y en esencia es la desviación de un haz que incide normal a una superficie y se desvía en un ángulo dado por las ecuaciones de arriba. Esta desviación se debe a que existe una discontinuidad del vector de onda tangencial a la superficie debido al gradiente de fase dado por el término de la derecha en (4.3) y (4.4). Recordemos que la superficie está compuesta por anillos resonadores, y además que dichos

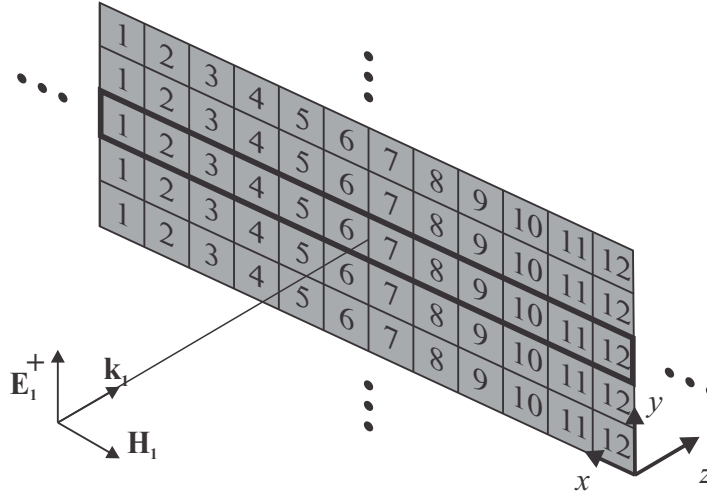


Figura 4.1: Esquema de la estructura simulada con una macro-celda unidad compuesta por 12 celdas unidad como la mostrada en la Figura 3.6 con diferentes parámetros l y s como se describe en la Tabla 4.1.

anillos poseen una variación suave de la fase de 0 a 2π entre 0 y 6GHz. Ahora, se desea diseñar una metasuperficie para refracción anómala a 3GHz con saltos de fase de 30° entre celdas adyacentes. Para ello, podemos recordar que, de la teoría, la frecuencia de resonancia para nuestra estructura dependía de los parámetros L y C , los cuales estaban asociados a la geometría de los anillos. En particular, es fácil darse cuenta de que con una variación de la longitud l podemos controlar la frecuencia de resonancia de la celda unidad.

En la figura 4.2 se representan la magnitud y fase del coeficiente de transmisión para distintos valores del parámetro l de una celda unidad como la representada en 3.6 y realizando un ajuste del parámetro s con el fin de que la celda cumpla lo mejor posible la condición de transparencia, y, se obtenga el máximo valor del coeficiente de transmisión a la frecuencia de 3 GHz.

La línea negra sólida representa la frecuencia de diseño, en la cual se obtienen saltos de fase entre una celda y su adyacente de aproximadamente 30° . En la tabla 4.1 se exhiben los valores obtenidos desde la simulación para la magnitud y la fase del coeficiente de transmisión a 3GHz. Luego de haber ajustado los parámetros geométricos de los anillos resonadores, éstos se pueden organizar de acuerdo a la figura 4.1 e imponer condiciones periódicas sobre las coordenadas x e y .

La figura 4.3 representa los resultados de simulación del monitor de campo eléctrico a frecuencia $f = 3\text{GHz}$. Se puede apreciar la onda incidente propagándose hacia la metasuperficie

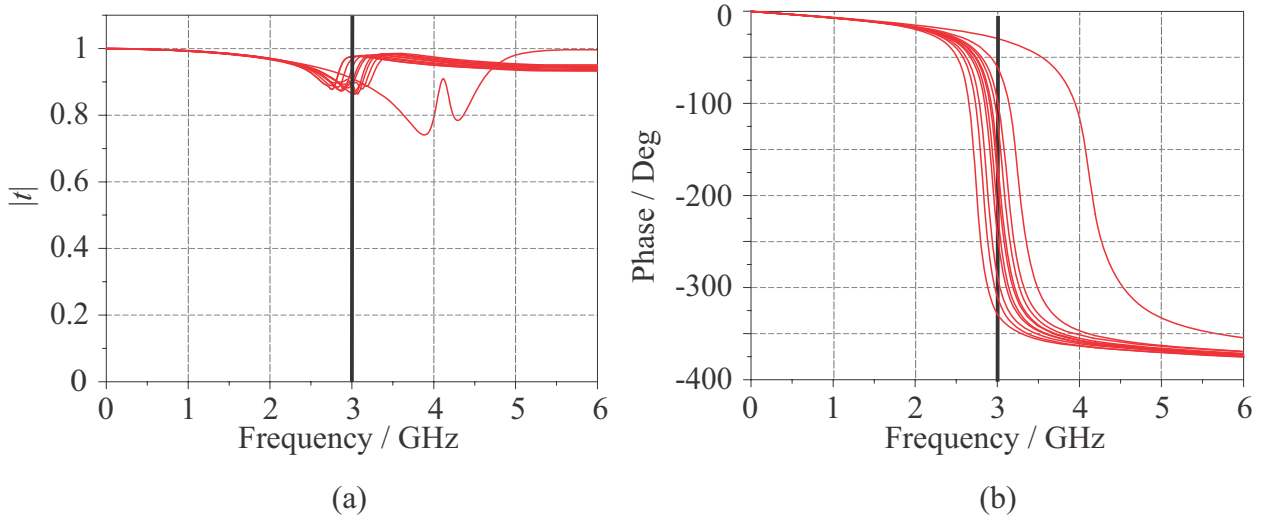


Figura 4.2: Resultados de simulación de las 12 celdas unidad: (a) magnitud de la transmisión y (b) fase. La línea negra sólida representa el corte a 3GHz para el cual se obtienen aproximadamente saltos de fase multiplos de 30° .

Número	Fase	$l(\text{mm})$	$s(\text{mm})$	$ t $
0	-	-	-	1.00
1	29.7	2	5.3	0.91
2	60.8	4.7	5.3	0.89
3	88.6	5.2	5.4	0.87
4	114.8	5.4	5.4	0.89
5	153.8	5.6	5.4	0.90
6	175.8	5.7	5.4	0.89
7	216.4	5.9	5.5	0.90
8	237.5	6	5.5	0.90
9	286.3	6.3	5.5	0.94
10	309.9	6.3	5.6	0.97
11	327.6	7	5.8	0.98

Tabla 4.1: Valores obtenidos de la magnitud y la fase de la transmisión a 3GHz para las 12 celdas unidad de la metasuperficie. La primera celda unidad se representa por una celda de vacío con transmisión modulo de transmisión igual a 1 y un desfase nulo del campo en el plano de referencia de la metasuperficie.

con casi ninguna reflexión y en la región transmitida, se puede apreciar una onda refractada anómalamente. Según (4.3) y (4.4), el ángulo de refracción y reflexión anómalo para una macro-celda unidad de longitud $d = 12a$ compuesta por las doce celdas unidad diseñadas según la tabla 4.1, debe ser $\theta_t = \theta_r = 56.4^\circ$.

Cada sub-figura representa instantes de tiempo fijos para distintas fases de propagación de la onda incidente. El diagrama de colores representa la amplitud del campo eléctrico normalizada con el campo incidente. Es claro que existe una pequeña reflexión, sin embargo, es posible afirmar que la metasuperficie es aproximadamente transparente si se comparan frentes de onda de fase constante.

Uno de los factores que puede afectar la transmisión es el acople de la celda con desfase de 30° y la de 0° representada por un espacio vacío. De la teoría se concluye que para tener una superficie transparente, es necesario que los sub-arreglos de anillos posean la misma corriente. Esto hace que para la celda de vacío la cual no posee en principio ninguna corriente inducida, se acople de manera diferente con las celdas adyacentes que si poseen corrientes inducidas.

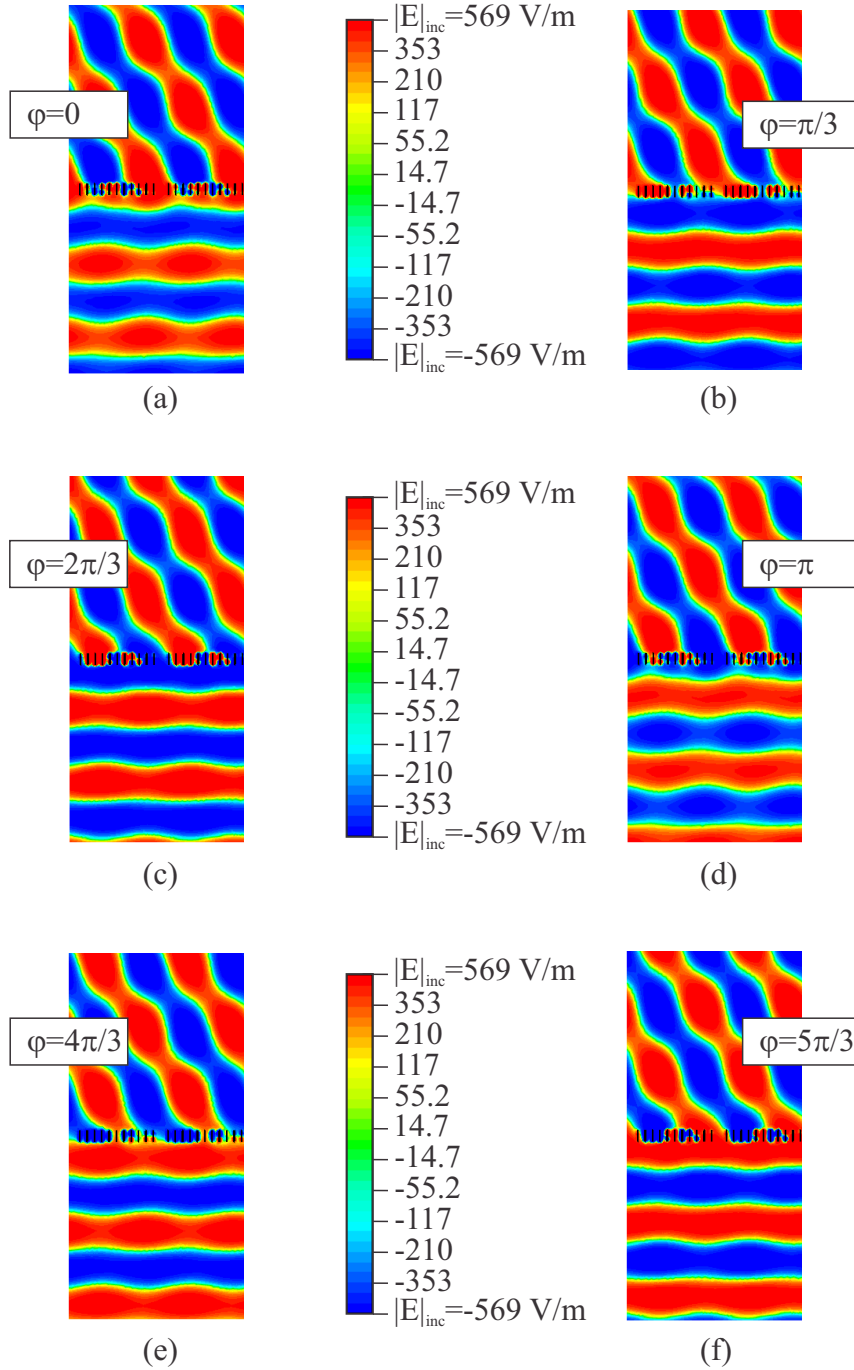


Figura 4.3: Resultados de simulación para el monitor de campo eléctrico a la frecuencia $f = 3\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico incidente: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$. El ángulo obtenido para la onda refractada es de $\theta = 56.4^\circ$. La amplitud del campo eléctrico es representada por la escala de colores, con una máxima amplitud obtenida de $|E| = 569\text{V/m}$.

4.2. Control del estado de polarización

Otra de las aplicaciones mencionadas en el capítulo 1 es la de poder controlar el estado de polarización de la onda incidente. De acuerdo al modelo del capítulo 2 y los resultados de simulación del 3, es posible darse cuenta que la metasuperficie diseñada desfasa la componente y del campo eléctrico dejando la componente x constante. Esto es debido a que en el modelo, se consideran únicamente dipolos paralelos al campo incidente. En la práctica, debido a que los anillos sólo pueden ser excitados por un campo incidente polarizado en y , la transmisión en x es en esencia la de una celda de vacío.

Si consideramos que una onda polarizada linealmente a 45° incide sobre la metasuperficie con celda unidad de cobre impreso sobre un sustrato dieléctrico ARLON AD250 (véase Figura 3.6 y 3.7 a la luz de la Figura 4.4), es posible, de acuerdo al modelo, tener cualquier estado de polarización elíptica sintonizando la frecuencia de la onda con la que se incide. En particular, se presentarán los casos para los cuales se obtiene un desfase de -90° , 90° y 180° , asociados a la conversión de polarización lineal a circular, y el estado de polarización cruzado respectivamente.

De los resultados de simulación mostrados en la Figura 3.7, obtenemos las frecuencias en las cuales suceden estos casos, $f_{PCI} = 2.73$ GHz para polarización circular izquierda, $f_{PCR} = 2.92$ GHz circular derecha, y $f_{PO} = 2.83$ GHz para polarización ortogonal o cruzada. La Figura 4.4 muestra el estado de polarización de la onda incidente a distintas fases iniciales en un plano de referencia arbitrario.

La Figura 4.5 representa los resultados de la simulación del campo eléctrico a $f = f_{PLC}$ para distintas fases iniciales del campo transmitido. El plano de referencia es arbitrario y se encuentra en la región transmitida de la metasuperficie (en la figura los elementos no representan la amplitud del campo transmitido). La transmisión obtenida para dicha frecuencia es, según la Figura 3.7, de $|t| = 0.88$.

La figura 4.6 representa los resultados de la simulación del campo eléctrico a $f = f_{PCI}$ para distintas fases iniciales del campo incidente. El plano de referencia es arbitrario y se encuentra en la región transmitida de la metasuperficie (nuevamente, los elementos no representan la amplitud del campo transmitido). La transmisión obtenida para dicha frecuencia es, según 3.7, es $|t| = 0.89$ para el eje y y la unidad para el eje x . Según esto, la polarización obtenida en la región de transmisión no es estrictamente polarización circular. Sin embargo, haciendo una comparación mediante el *axial ratio* (en esencia $|t_y|/|t_x|$) $AR = 0.89$, se observa que es

mayor al mínimo permitido de 0.71 para el estado de polarización circular.

Por último, la figura 4.7 representa los resultados de la simulación del campo eléctrico a $f = f_{PCD}$ nuevamente para distintas fases iniciales del campo incidente. El plano de referencia se toma igual que para los casos anteriores. La transmisión obtenida para dicha frecuencia es, según la Figura 3.7, es $|t| = 0.93$ para el eje y y la unidad para el eje x . De nuevo, haciendo una comparación entre los coeficientes de transmisión dichos ejes, es posible observar que el *axial ratio* es de $AR = 0.93$, lo cual se encuentra por encima del límite aceptado.

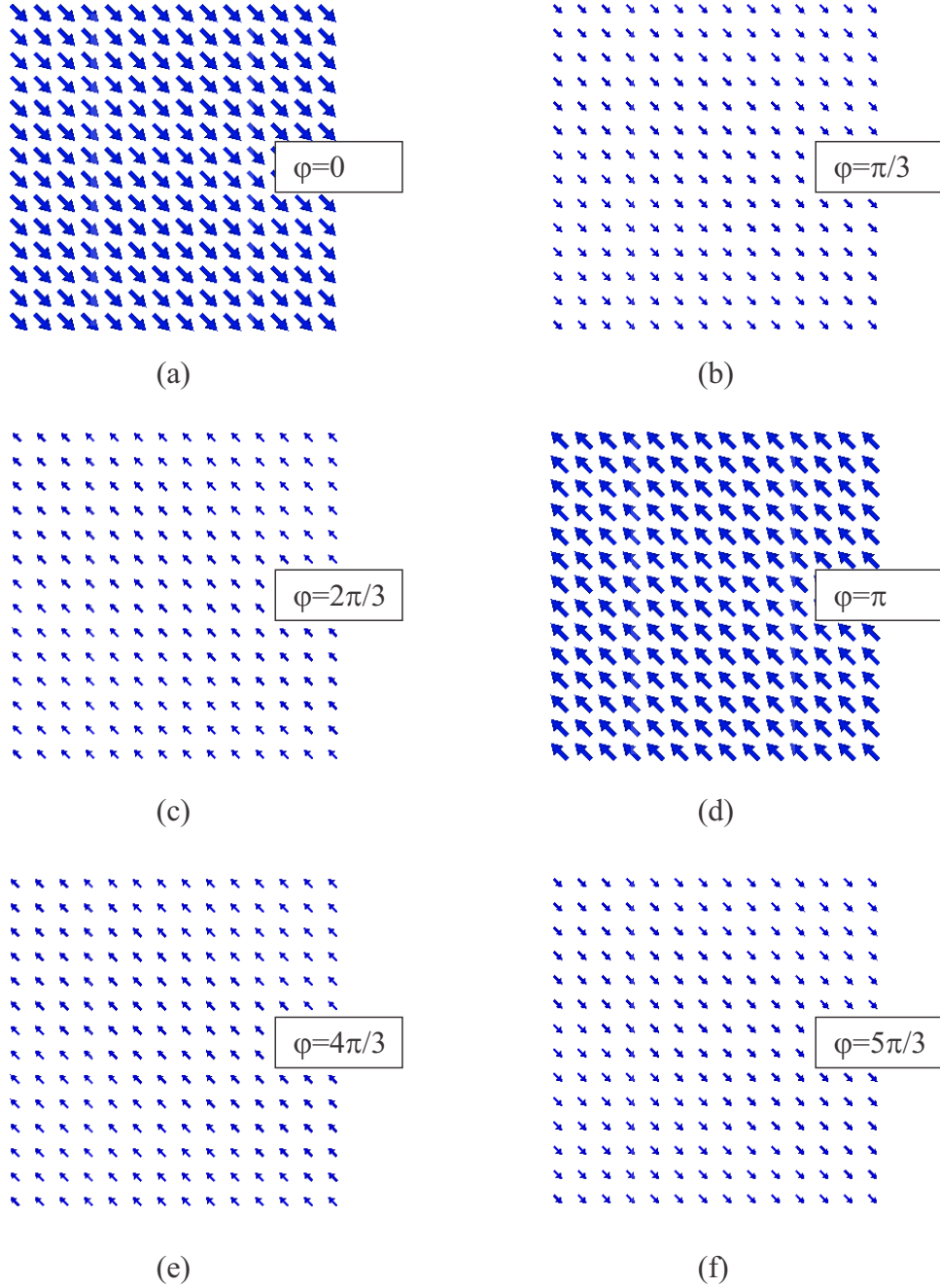


Figura 4.4: Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico en la región incidente a un plano y frecuencia de referencia arbitrarios. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$.

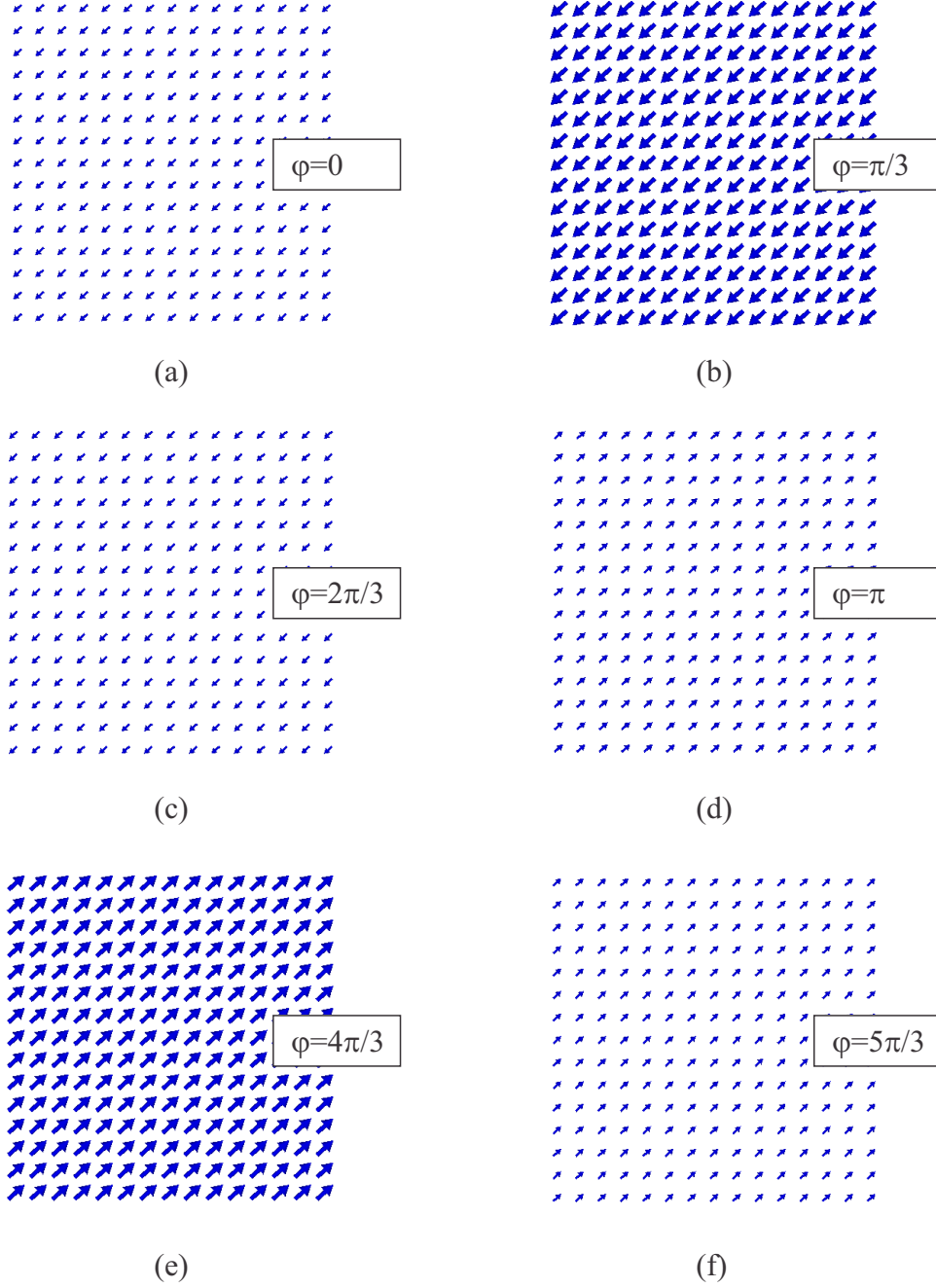


Figura 4.5: Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico para un plano de referencia arbitrario en la región de transmisión y a la frecuencia $f_{PLC} = 2.83\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$.

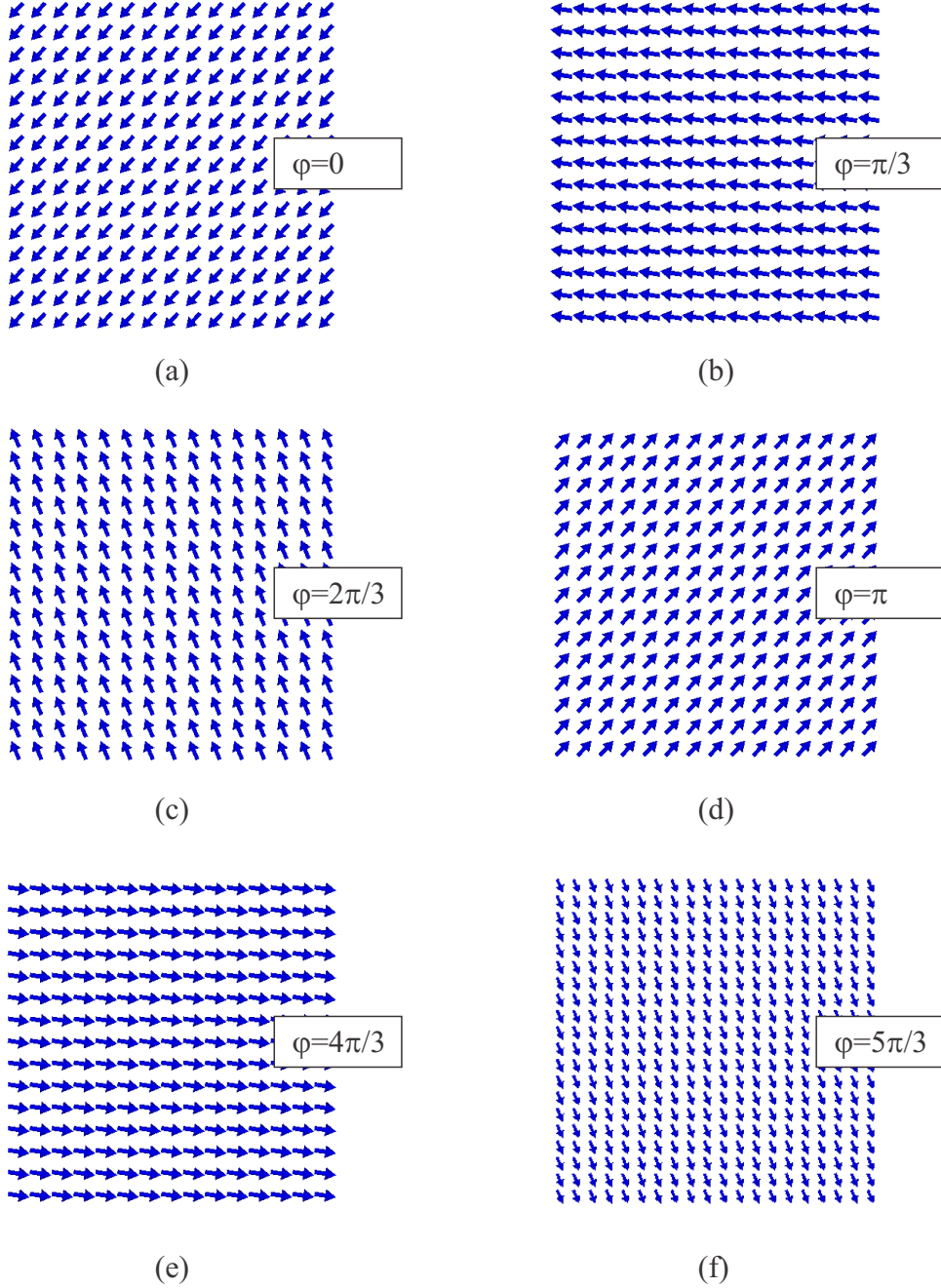


Figura 4.6: Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico en la región de transmisión a la frecuencia $f_{PCI} = 2.73\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$.

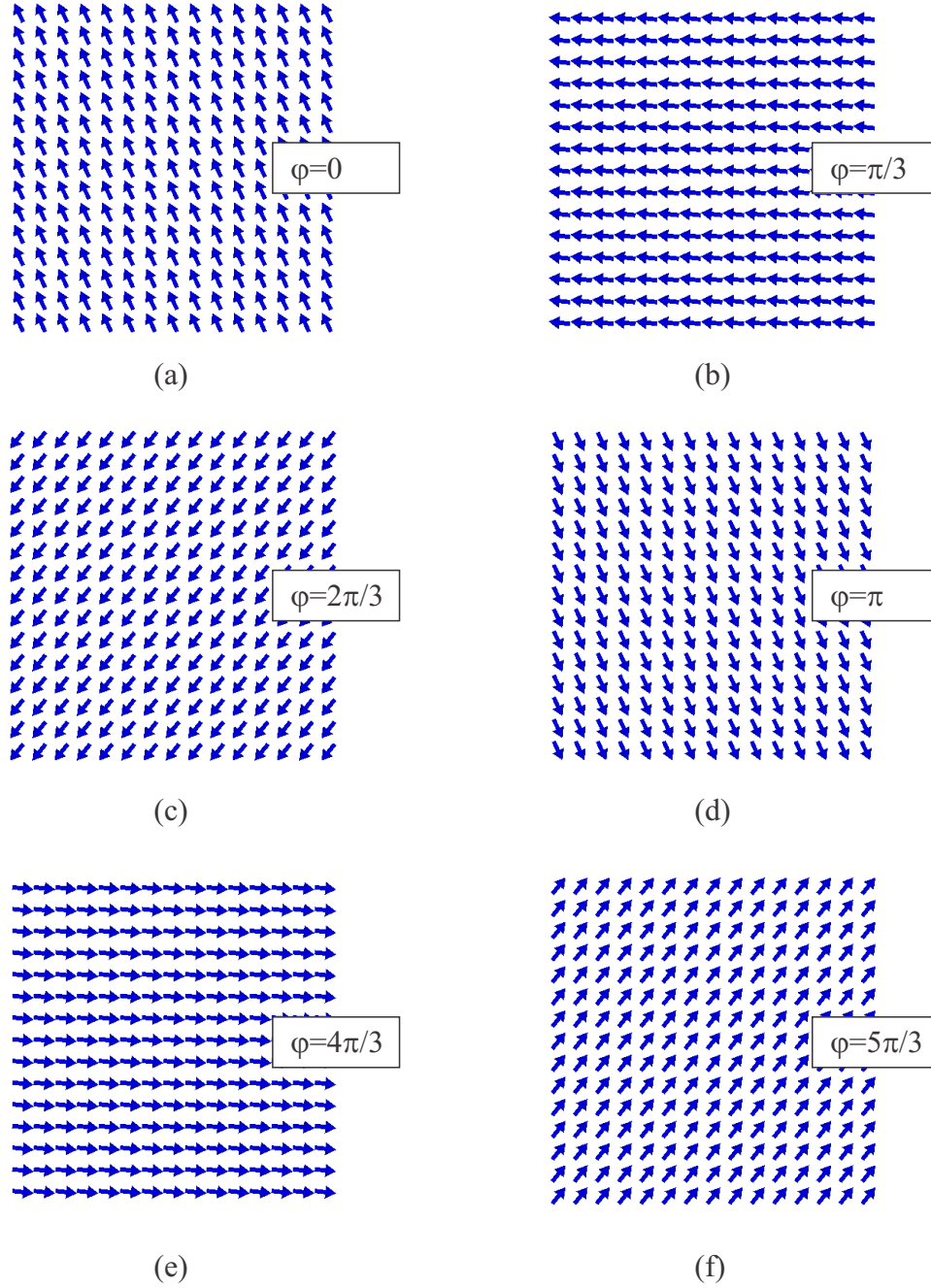


Figura 4.7: Resultados de la simulación para el monitor de campo eléctrico en la región de transmisión a la frecuencia $f_{PCD} = 2.92\text{GHz}$. Se representan distintas fases de propagación del campo eléctrico transmitido: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/3$, (c) $\varphi = 2\pi/3$, (d) $\varphi = \pi$, (e) $\varphi = 4\pi/3$, (f) $\varphi = 5\pi/3$.

5 Conclusiones

Del modelo desarrollado en el capítulo 2, es posible concluir que la condición de transparencia exige que existan corrientes magnéticas superficiales efectivas sobre la metasuperficie, luego, esto se traduce en exigir que las polarizabilidades eléctrica y magnética de la metasuperficie sean iguales. Después se evidenció que una resonancia tipo Lorentz podía dar cuenta de dicha condición, y por lo tanto, se hizo necesario desarrollar un modelo de circuito para un elemento resonador. Además, fué necesario tener una simetría de inversión para que se valide la condición de transparencia. Debido a esto, fue necesario desarrollar un modelo de circuito de un arreglo de anillos acoplados y se llegó a traducir la condición de transparencia en una condición geométrica de los parámetros de los anillos.

Se observó que debido a que la metasuperficie está compuesta por dos sub-arreglos de anillos, existen dos modos normales de resonancia de los mismos, uno asociado a la polarizabilidad eléctrica y el segundo, asociado a la magnética. Fue necesario exigir que el comportamiento en frecuencia de dichas polarizabilidades fuera aproximadamente igual con el fin de que la condición de transparencia para la metasuperficie fuera válida. Esto condujo a exigir una degeneración de los modos de resonancia de los anillos, al hacer que el acople magnético entre ellos fuera nulo.

Luego, en el capítulo 3, se validó la teoría analizando el comportamiento en frecuencia del coeficiente de transmisión de la metasuperficie para distintas configuraciones del deslizamiento entre los sub-arreglos. Nos dimos cuenta que cuando el deslizamiento s era cercano al óptimo de 5.6mm, las resonancias eléctrica y magnética se unían en una resonancia oculta a una frecuencia de $f = 3.45\text{GHz}$, y una variación suave de la fase de 0 a 2π . Se validó la condición de transparencia primero encontrando la configuración de máxima transmisión $|t| = 0.99$, y luego, mediante las gráficas de las polarizabilidades de la metasuperficie en función de la frecuencia.

Se demostró pues, que las hipótesis hechas en el capítulo 2 eran válidas para el caso ideal sin pérdidas. Posteriormente, se procedió a analizar la acción de un material de conductividad

finita como el cobre en la metasuperficie. Se observó que, aunque los anillos resonadores tuvieran pérdidas asociadas a la resistividad del cobre, tanto la frecuencia de resonancia, como el pico de amplitud de la transmisión eran comparables al caso ideal. Se introdujo la acción de un sustrato dieléctrico ARLON AD250 que sirve de soporte para los anillos resonadores hechos de cobre. Se mostró que el material dieléctrico genera un desajuste en la polarizabilidades, y debido a esto, fue necesario realizar un re-ajuste de los parámetros geométricos de los anillos. Aún así, se reportó una transmisión en la frecuencia de resonancia $f = 2.82\text{GHz}$, de $|t| = 0.88$. Por último, se realizó un estudio de la transmisión de la metasuperficie en función del ángulo de incidencia del campo electromagnético, reportando que $|t| > 0.8$ para ángulos menores a $\theta = 45^\circ$.

Del capítulo 3, se concluye que se ha diseñado exitosamente una metasuperficie transparente en un rango de frecuencia reportado de 0 a 6 GHz con control total del salto de fase del campo transmitido de 0 a 2π . En el capítulo 4, se estudiaron dos posibles aplicaciones de dicha metasuperficie: la refracción anómala de un haz bajo incidencia normal a la metasuperficie, y, el control del estado de polarización del campo transmitido. Se demostró que, variando dos parámetros geométricos de los anillos resonadores, es posible diseñar una metasuperficie que refracte un haz que incide normalmente a un ángulo $\theta = 56.4^\circ$ para la frecuencia $f = 3\text{GHz}$.

Posteriormente, se demostró que para una onda que incide normal a la metasuperficie y polarizada linealmente a 45° , es posible, sintonizando la frecuencia con la que incide la onda, convertir el estado de polarización de lineal a cualquier elíptico. En particular, se estudiaron los caso de polarización circular a las frecuencias $f = 2.73\text{GHz}$ y $f = 2.92\text{GHz}$, y además, el del estado de polarización cruzado a la frecuencia $f = 2.83\text{GHz}$. Para concluir, se deja abierta la posibilidad de estudiar una metasuperficie con propiedades de birrefringencia con control total del estado de polarización. Además, realizar un experimento sencillo con el cual se pueda fabricar y validar los resultados obtenidos en este trabajo, el cual debido al corto periodo de tiempo que supone la realización de una maestría, no fue posible realizarlo.

Con esto damos por finalizada la tesis de maestría titulada *Metasuperficies transparentes con control total del salto de fase*, espero que leer estas páginas hayan sido igual de agradables para ustedes que para mi haberlas escrito, y espero que hayan encontrado información útil entre las mismas. Gracias!

Bibliografía

- [1] R. R. DeLyser, "Use of equivalent boundary conditions for the solution of a class of strip grating structures," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 41, no. 1, pp. 103–105
- [2] B. Munk, "Frequency selective surfaces: theory and design. 2005," *Hoboken: John Wiley and Sons*.
- [3] A. S. Barlevy and Y. Rahmet-Samii, "Fundamental constraints on the electrical characteristics of frequency selective surfaces," *Electromagnetics*, vol. 17, no. 1, pp. 41–68, 1997. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1080/02726349708908515>
- [4] T. B. Senior, "Combined resistive and conductive sheets," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 33, no. 5, pp. 577–579 0018–926X, 1985.
- [5] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ?" *Soviet physics uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509
- [6] D. Pozar, "Flat lens antenna concept using aperture coupled microstrip patches," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 23, pp. 2109–2111 0013–5194, 1996.
- [7] D. Lerner, "A wave polarization converter for circular polarization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 13, no. 1, pp. 3–7
- [8] A. Sochava, C. Simovski, and S. Tretyakov, *Chiral effects and eigenwaves in bi-anisotropic omega structures*. Springer, 1997, pp. 85–102.
- [9] Y. Ye and S. He, "90 polarization rotator using a bilayered chiral metamaterial with

- giant optical activity,” *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 20, pp. 203 501
- [10] C. Dietlein, A. Luukanen, Z. Popovi, and E. Grossman, “A w-band polarization converter and isolator,” *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 55, no. 6, pp. 1804–1809
- [11] E. Doumanis, G. Goussetis, J. L. Gomez-Tornero, R. Cahill, and V. Fusco, “Anisotropic impedance surfaces for linear to circular polarization conversion,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 1, pp. 212–219
- [12] J. Baena, J. del Risco, A. Slobozhanyuk, S. Glybovski, and P. Belov, “Self-complementary metasurfaces for linear-to-circular polarization conversion,” *Physical Review B*, vol. 92, no. 24, p. 245413, 2015.
- [13] D. Berry, R. Malech, and W. Kennedy, “The reflectarray antenna,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 11, no. 6, pp. 645–651 0018–926X, 1963.
- [14] D. M. Pozar, S. D. Targonski, and H. Syrigos, “Design of millimeter wave microstrip reflectarrays,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 2, pp. 287–296
- [15] R. E. Munson, H. A. Haddad, and J. W. Hanlen, “Microstrip reflectarray for satellite communication and radar cross-section enhancement or reduction,” 1987.
- [16] A. Yu, F. Yang, A. Elsherbeni, and J. Huang, *Experimental demonstration of a single layer tri-band circularly polarized reflectarray*. IEEE, 2010.
- [17] D. Pozar, “Wideband reflectarrays using artificial impedance surfaces,” *Electronics Letters*, vol. 43, no. 3, pp. 1
- [18] D. McGrath, “Planar three-dimensional constrained lenses,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 1, pp. 46–50 0018–926X, 1986.
- [19] B. Memarzadeh and H. Mosallaei, “Array of planar plasmonic scatterers functioning as light concentrator,” *Optics letters*, vol. 36, no. 13, pp. 2569–2571

-
- [20] X. Ni, N. K. Emani, A. V. Kildishev, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, “Broadband light bending with plasmonic nanoantennas,” *Science*, vol. 335, no. 6067, pp. 427–427
- [21] F. Monticone, N. M. Estakhri, and A. Alù, “Full control of nanoscale optical transmission with a composite metascreen,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 20, p. 203903, 2013.
- [22] X. Ni, S. Ishii, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, “Ultra-thin, planar, babinet-inverted plasmonic metalenses,” *Light: Science and Applications*, vol. 2, no. 4, p. e72, 2013.
- [23] X. Zhang, Z. Tian, W. Yue, J. Gu, S. Zhang, J. Han, and W. Zhang, “Broadband terahertz wave deflection based on c-shape complex metamaterials with phase discontinuities,” *Advanced Materials*, vol. 25, no. 33, pp. 4567–4572
- [24] X. Chen, L. Huang, H. Mühlenbernd, G. Li, B. Bai, Q. Tan, G. Jin, C.-W. Qiu, S. Zhang, and T. Zentgraf, “Dual-polarity plasmonic metalens for visible light,” *Nature communications*, vol. 3, p. 1198, 2012.
- [25] D. Lin, P. Fan, E. Hasman, and M. L. Brongersma, “Dielectric gradient metasurface optical elements,” *science*, vol. 345, no. 6194, pp. 298–302
- [26] C. Pfeiffer and A. Grbic, “Controlling vector bessel beams with metasurfaces,” *Physical Review Applied*, vol. 2, no. 4, p. 044012, 2014.
- [27] —, “Metamaterial huygens’ surfaces: tailoring wave fronts with reflectionless sheets,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 19, p. 197401, 2013.
- [28] J. P. Wong, M. Selvanayagam, and G. V. Eleftheriades, “Design of unit cells and demonstration of methods for synthesizing huygens metasurfaces,” *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications*, vol. 12, no. 4, pp. 360–375
- [29] C. Pfeiffer and A. Grbic, “Cascaded metasurfaces for complete phase and polarization control,” *Applied Physics Letters*, vol. 102, no. 23, pp. 231116
- [30] Q. Yang, J. Gu, D. Wang, X. Zhang, Z. Tian, C. Ouyang, R. Singh, J. Han, and W. Zhang, “Efficient flat metasurface lens for terahertz imaging,” *Optics express*, vol. 22,

- no. 21, pp. 25 931–25 939 2014.
- [31] C. Pfeiffer and A. Grbic, “Millimeter-wave transmitarrays for wavefront and polarization control,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 61, no. 12, pp. 4407–4417
- [32] C. Pfeiffer, N. K. Emani, A. M. Shaltout, A. Boltasseva, V. M. Shalaev, and A. Grbic, “Efficient light bending with isotropic metamaterial huygens’ surfaces,” *Nano letters*, vol. 14, no. 5, pp. 2491–2497 1530–6984, 2014.
- [33] M. Decker, I. Staude, M. Falkner, J. Dominguez, D. N. Neshev, I. Brener, T. Pertsch, and Y. S. Kivshar, “High-efficiency dielectric huygens’ surfaces,” *Advanced Optical Materials*, vol. 3, no. 6, pp. 813–820 2195–1071, 2015.
- [34] F. Aieta, M. A. Kats, P. Genevet, and F. Capasso, “Multiwavelength achromatic metasurfaces by dispersive phase compensation,” *Science*, vol. 347, no. 6228, pp. 1342–1345
- [35] R. E. Collin, “Field theory of guided waves,” 1960.
- [36] Y. Ra’di, C. Simovski, and S. Tretyakov, “Thin perfect absorbers for electromagnetic waves: theory, design, and realizations,” *Physical Review Applied*, vol. 3, no. 3, p. 037001, 2015.
- [37] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. Robbins, and W. Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,” *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 47, no. 11, pp. 2075–2084 0018–9480, 1999.
- [38] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [39] N. Yu, P. Genevet, M. A. Kats, F. Aieta, J.-P. Tetienne, F. Capasso, and Z. Gaburro, “Light propagation with phase discontinuities: generalized laws of reflection and refraction,” *Science*, vol. 334, no. 6054, pp. 333–337